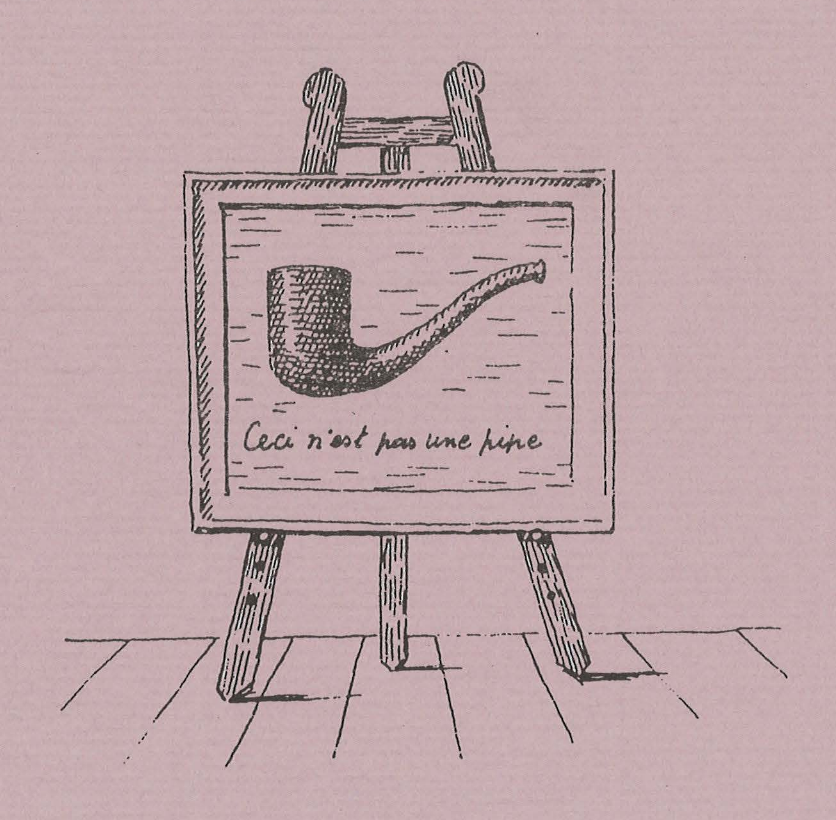
PROYECCIÓN Y REPRESENTACIÓN

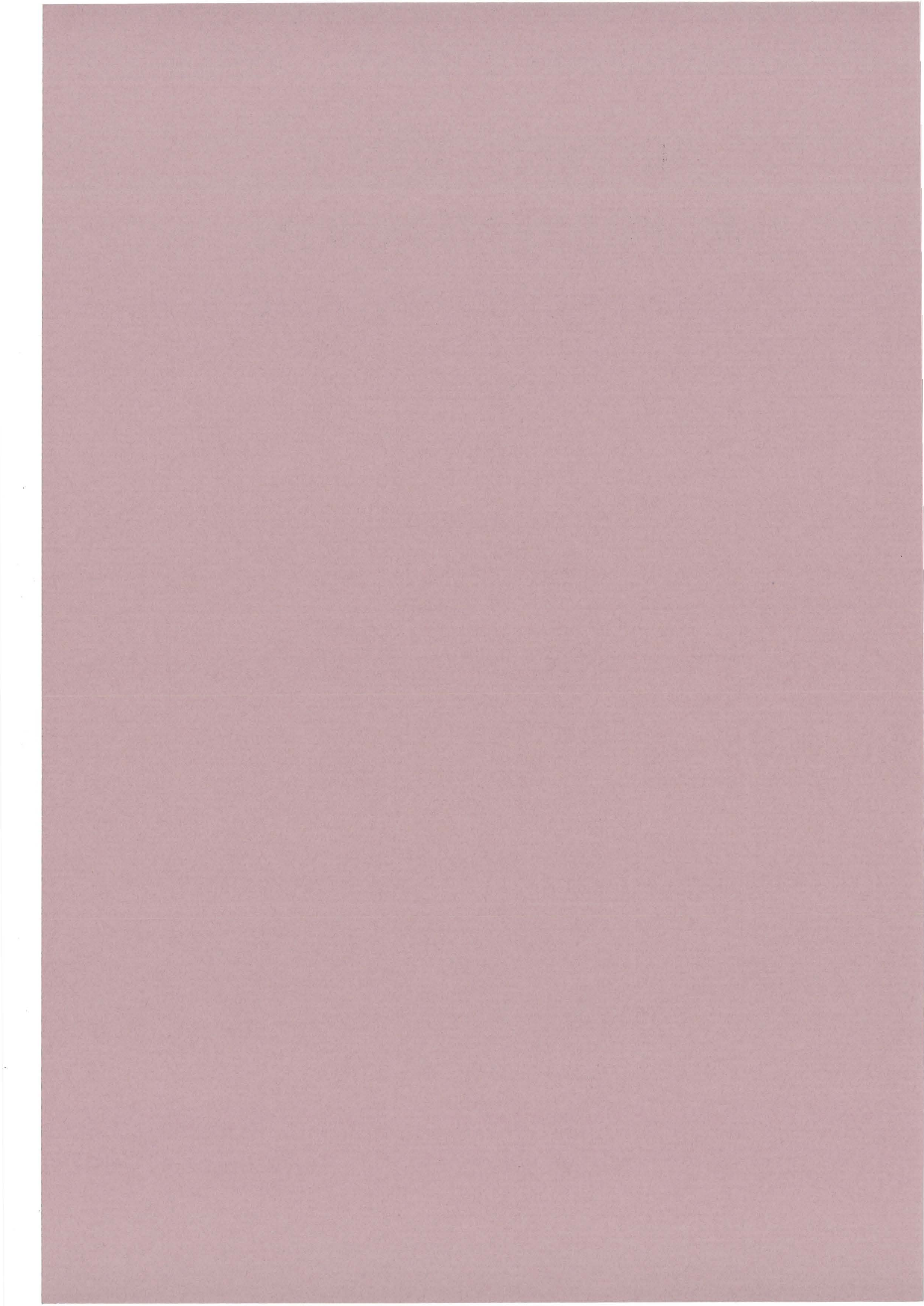
CONCEPTOS INTUITIVOS

por

ENRIQUE RABASA DÍAZ



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID



PROYECCIÓN Y REPRESENTACIÓN

CONCEPTOS INTUITIVOS

por

ENRIQUE RABASA DÍAZ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Proyección y representación. Conceptos intuitivos

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 78.01
ISBN: 84-95365-38-3
Depósito Legal: M-21619-2000

Este folleto resume muy brevemente algunos conceptos que es útil haber comprendido con vistas a la práctica de los sistemas gráficos de representación.

La sucesión de párrafos numerados introduce conceptos espaciales de forma intuitiva, sintética, y dando por supuesto que los desarrollos geométricos de temas específicos se pueden encontrar en cualquier texto de geometría descriptiva. Se suponen conocidas algunas cuestiones elementales. En las figuras se evita, con pocas excepciones, el seguimiento por índices alfanuméricos, que suele resultar tedioso.

Los términos característicos van en cursiva; las referencias internas a otros párrafos (#) pueden servir de aclaración. A la derecha de cada párrafo se indica la figura aludida, en su caso.

Elementos impropios

1. Un punto *impropio* está infinitamente alejado en determinada dirección. Tomemos una recta fija y otra que gira alrededor de un punto. La intersección de ambas rectas es un punto de la recta fija que, con el giro, se aleja en determinado sentido y que, tras alcanzar la posición en que son paralelas, vuelve por el otro. Cuando sean paralelas diremos que su intersección es un punto impropio; así, los puntos de la recta fija forman una serie continua y cerrada. Todo sucede como si la recta fuera una circunferencia de radio infinito. — 1 / 1, 2

2. El punto impropio de una recta no es el infinitamente alejado en determinado sentido de la recta: por los dos sentidos se llega al punto impropio.

3. Un haz de rectas puede converger en un punto propio (radiación) o en un punto impropio. En éste último caso se trata de un haz de rectas paralelas. — 3

4. Las rectas paralelas tienen en común su dirección. También tienen en común su punto impropio, por el que todas pasan. Por tanto se puede decir que 'dirección' y 'punto impropio' contienen el mismo concepto, son términos intercambiables en los enunciados (de hecho la geometría proyectiva suele definir el punto impropio como la dirección de una recta).

5. Por un eje o recta pasa un haz de planos. Por una recta impropia pasa un haz de planos paralelos. Los términos *orientación* del plano y *recta impropia* del plano son intercambiables. (La *orientación* es al plano, lo que la *dirección* a la recta)

Sistemas de representación

6. Hay modos de representar las formas (modos de hacer perspectivas o vistas) que siguen ciertas reglas y han sido generados históricamente. Los *sistemas de representación* son esos modos de representar cuando constituyen un sistema, es decir, cuando permiten la representación no ambigua del espacio y permiten también operaciones sobre las formas representadas para conocer algo más. Por ejemplo, la perspectiva lineal es una manera de representar las formas, pero estudiada como proyección cónica se constituyó en sistema; la organización coordinada de planta y alzado generó el sistema diédrico, etc.

7. Esto ha sucedido en un segundo momento: los geómetras han establecido las reglas de los sistemas de representación para sistematizar, para organizar racionalmente, unos modos de representar que ya existían.

8. Los textos de geometría descriptiva suelen empezar por las ideas abstractas de proyectar y seccionar; las variantes en la elección del centro de proyección y del plano del cuadro o plano de proyección, dan lugar a los distintos sistemas de representación. Sin embargo en la génesis histórica de la perspectiva, de la axonometría o del sistema diédrico, no fue lo primero la idea de proyección; hay incluso modos de representar las formas espaciales de los que, en su momento, no fue muy fácil o inmediato demostrar que se tratara de otras formas de proyección plana (véase #52 y #53)

figuras

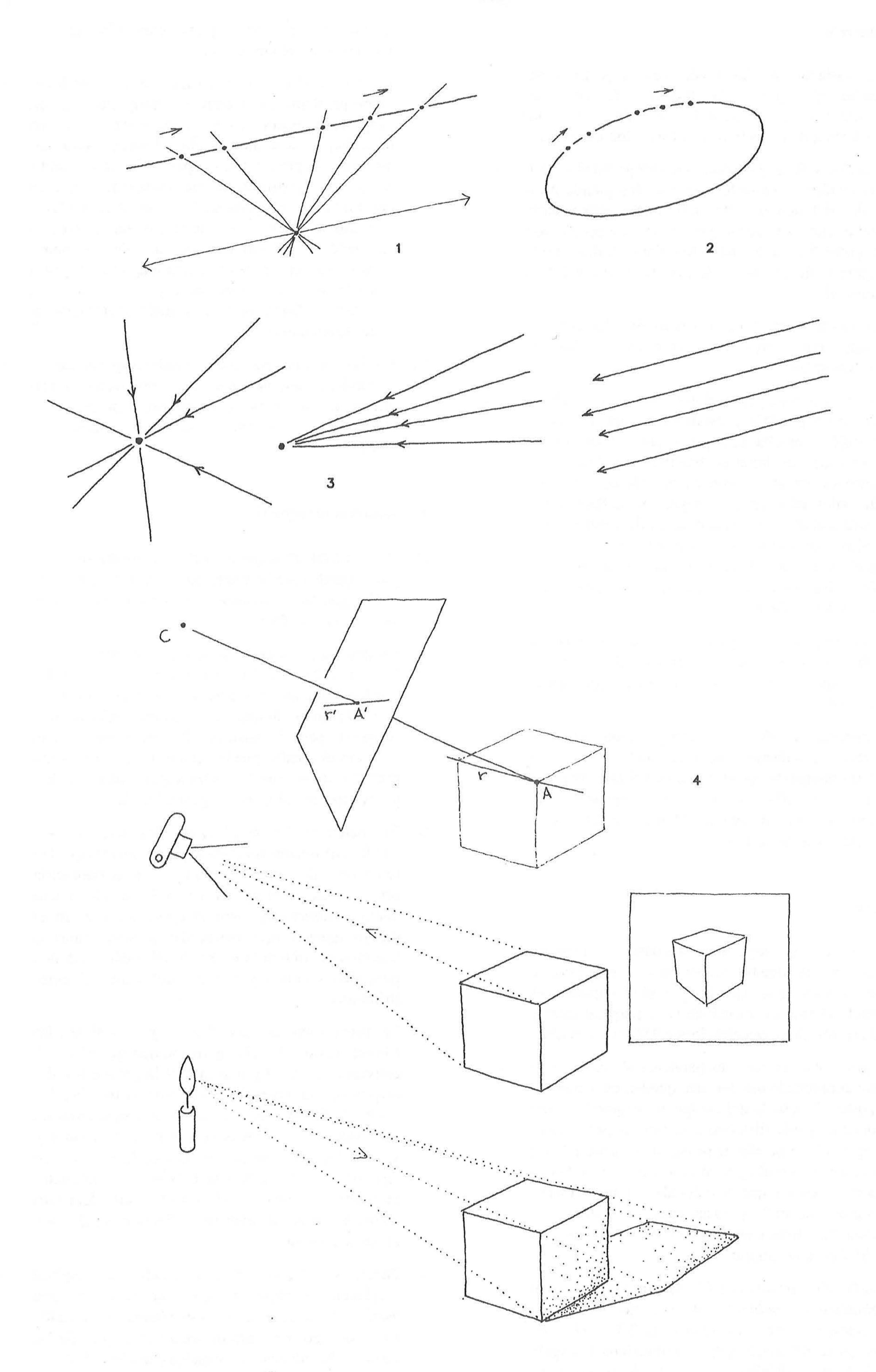
9. La idea de proyección es una abstracción de la idea de visión (punto de vista, rayos visuales) o de la idea de sombra (foco, rayos de luz). El centro de proyección (o punto de vista, o foco) puede ser un punto propio o impropio. — 4

Plano de proyección

10. Los rayos proyectantes forman una radiación, una a modo de pirámide con el vértice en el centro de proyección. Si el centro de proyección es impropio se dice que el sistema es de proyección cilíndrica o paralela. Los rayos proyectantes son entonces paralelos, y conforman un a modo de prisma. El plano de proyección o del cuadro secciona al prisma proyectante y esa sección es la imagen.

11. Dos secciones paralelas de un prisma son iguales; dos secciones cualesquiera, no paralelas, son afines. Dos secciones paralelas de una pirámide son semejantes; dos secciones no paralelas son homólogas.

12. Lo importante del plano del cuadro es su orientación (#5), y no su posición concreta: si el cuadro se mueve paralelamente a sí mismo, sin perder la orientación, entonces no cambia la imagen (si la proyección es central cambia sólo de tamaño).



1
2
3
C
r'
A'
r
A
4

Axonometría

13. Las variantes de las posiciones respectivas del cuadro, el objeto y la dirección de los rayos proyectantes (es decir, del centro de proyección) dan lugar a diversos tipos de proyección cilíndrica.

14. Si la dirección de proyección es ortogonal al cuadro y el cuadro es paralelo a uno de los planos principales del objeto, obtenemos una representación frontal, como la *planta* o el *alzado*. La proyección ortogonal frontal de una figura plana no distorsiona ángulos ni distancias; se dice que está en *verdadera magnitud*. — 5

15. Se llama axonometría a la proyección cilíndrica que se construye a partir de las direcciones de los tres ejes coordenados.

16. Si la dirección de proyección es oblicua al cuadro y el cuadro es paralelo a uno de los planos principales del objeto, resulta una proyección axonométrica oblicua que se llama perspectiva caballera. Si el cuadro es paralelo a uno de los planos verticales principales del objeto, la proyección se llama perspectiva caballera de cuadro vertical, o perspectiva caballera de alzado. Si es paralelo al plano horizontal se llama caballera de cuadro horizontal o *militar*. En ambos casos puede estar vista desde arriba o desde abajo. — 7, 8

17. Si la dirección de proyección es ortogonal al cuadro, pero el cuadro no es paralelo a ningún plano especial, el resultado es una axonometría ortogonal. — 6

18. Si mantenemos fijo el objeto y la dirección de proyección, podemos situar el cuadro de manera que se obtenga una perspectiva caballera o bien una axonometría oblicua, que son entonces dos secciones de un mismo haz de rayos paralelos, y en consecuencia son afines. — 8

Caballera

19. Al proyectar un segmento oblicuamente sobre un plano, puede quedar aumentado o reducido, o puede quedar igual. Queda igual si el segmento es paralelo al cuadro, y también si es perpendicular y la dirección de proyección forma 45º con el cuadro.

20. En una caballera, los ejes paralelos al cuadro, y el plano coordenado que forman, quedan en verdadera magnitud. La escala del eje que no es paralelo sino ortogonal queda distorsionada por la proyección, excepto si la dirección de proyección forma 45º con el cuadro (y con el eje). Si el ángulo que forma es mayor, la escala queda reducida. Si fuera menor quedaría aumentada, pero ese caso no se contempla, porque ver distancias mayores de lo que son el realidad resulta extraño. — 9

21. Para ángulos menores de 45º podemos hablar de un *coeficiente de reducción* de ese eje. Es normal adoptar coeficientes de reducción 2/3 ó 1/2, por comodidad. El «coeficiente de reducción» 1 (ángulo de 45º) es admisible en caballeras de cuadro horizontal, pero hace los objetos demasiado alargados en caballeras de cuadro vertical.

figuras

22. En una caballera dos ejes están sobre el cuadro (o plano paralelo) y el tercero está proyectado. El eje proyectado puede tener teóricamente cualquier dirección y cualquier escala; siempre habrá una dirección de proyección tal que se dé ese resultado. Si en una caballera el eje proyectado está en prolongación de alguno de los otros (o coincide), y su escala es la misma (coeficiente de reducción 1, si se puede hablar así) entonces dos de los planos coordenados están en verdadera magnitud. Si estos dos planos son el horizontal y uno vertical, la caballera se llama *de Hejduk* (más impropiamente se ha llamado *egipcia*). — 9

23. En una caballera podemos considerar que el cuadro es paralelo a uno de los planos coordenados, o bien que es el mismo plano coordenado, porque si el cuadro se mueve paralelamente no cambia nada (#12). — 9

Axonometría ortogonal

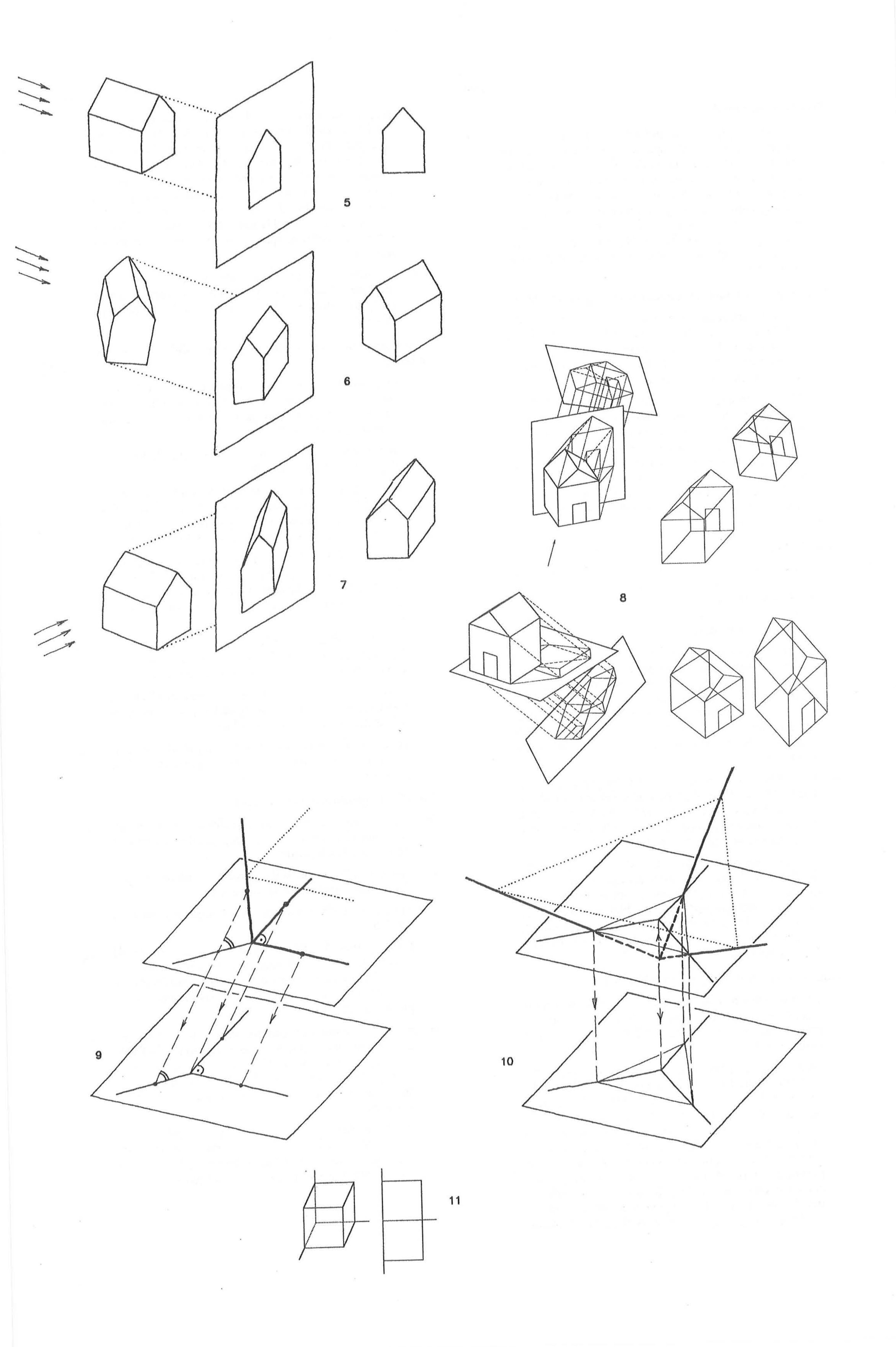
24. Al proyectar un segmento ortogonalmente sobre un plano puede quedar reducido o igual. Queda igual si el segmento es paralelo al cuadro. Es como si lo viéramos *frontalmente*.

25. En una axonometría ortogonal en general, los ejes forma ángulos con el cuadro, y por tanto sus escalas quedan reducidas. Los tres ejes son perpendiculares entre sí (forman lo que llamamos un *triedro trirrectángulo*), pero la posición de este conjunto con respecto al cuadro puede ser cualquiera. Por tanto cada uno de los ejes forma un ángulo con el cuadro, y estos tres ángulos son en general distintos. — 10

26. En determinadas condiciones los tres ángulos pueden ser iguales (entonces las tres escalas quedan reducidas de igual manera y la axonometría ortogonal se llama isométrica) o dos iguales y uno distinto (dimétrica), pero si queremos que en el dibujo queden más destacadas algunas caras o aspectos del objeto la posición del triedro será una posición cualquiera y las tres escalas son diferentes (trimétrica).

27. La proyección de los ejes x, y, z del triedro trirrectángulo sobre el cuadro son tres ejes x', y', z', convergentes en el punto que es la proyección del origen, que en general forman entre sí tres ángulos distintos. En una isométrica los tres ejes están en igualdad de condiciones con respecto al cuadro y x', y', z' forman ángulos iguales de 120º. Un cubo representado en isométrica tiene un perímetro hexagonal regular y el vértice más delantero coincide con el más alejado: la figura es simétrica y puede confundir.

28. Podemos considerar que el cuadro se desplaza paralelamente hasta que corta al triedro en una esquina. La sección de los tres planos coordenados es el llamado *triángulo de trazas* (triángulo de las trazas de los planos coordenados con el cuadro). — 10


5
6
7
8
9
10
11

Perpendicularidad

29. Dos rectas pueden ser perpendiculares en el plano (si se cortan) o en el espacio (si se cruzan). Si dos rectas que se cruzan perpendicularmente se proyectan sobre un mismo plano y una de ellas es paralela al plano de proyección, las proyecciones de las dos rectas también son perpendiculares. Si se cortan se puede decir lo mismo. Es decir, dos rectas conservan su perpendicularidad en la proyección si (y sólo si) al menos alguna de ellas es paralela al plano de proyección.

Axonometría ortogonal; cuadro y triángulo de trazas

30. Las proyecciones ortogonales de los tres ejes del triedro trirrectángulo son las alturas del triángulo de trazas (esto es fácil de demostrar si se piensa en uno de los ejes y el lado del triángulo de trazas que se cruza perpendicularmente con él).

31. Dado el triángulo de trazas, sus alturas son las proyecciones de los ejes. Dadas las proyecciones de los ejes (es decir, tres semirrectas convergentes), cualquier triángulo del cual esas rectas sean las tres alturas puede ser el triángulo de trazas; todos son semejantes, y cualquiera de ellos representa al cuadro; elegir otro más grande o más pequeño equivale sólo a mover paralelamente el cuadro, nada cambia.

Abatimiento

32. Cuando un punto *gira* alrededor de un eje describe una circunferencia que está sobre un plano perpendicular al eje y con centro en el eje. (Podemos hablar también de giros elípticos, manteniendo todas las elipses la misma proporción).

33. En cualquier sistema las figuras que están sobre el cuadro o sobre un plano paralelo al cuadro son frontales y aparecen en verdadera magnitud, sin distorsión. (Las figuras que están en otros planos quedan distorsionadas por la proyección, y si están en un plano proyectante, es decir, paralelo a la dirección de proyección, quedan reducidas a un segmento).

34. Un *abatimiento* es un giro de un plano (de sus puntos) hasta dejar al plano coincidente el cuadro o paralelo a él, con el objeto de ver en la proyección lo que contiene en *verdadera magnitud*. No se abaten cuerpos, sino planos o figuras planas.

35. Para que dos planos coincidan basta hacer girar uno de ellos alrededor de la intersección común. Como eje de giro de un abatimiento se toma una recta del plano a abatir que pertenece también al cuadro o es paralela a él. Es la intersección del plano con el cuadro (su *traza*) o una recta del plano paralela a esa intersección.

Axonometría ortogonal; graduación de los ejes

36. Las proyecciones de los ejes en una axonometría ortogonal (trimétrica) tienen sus escalas distintas. Para graduar los ejes abatimos los planos coordenados.

37. Para abatir un plano coordenado (por ejemplo xz) lo giramos alrededor de la traza correspondiente del triángulo de trazas. En el giro el origen **O** se mueve describiendo un arco de circunferencia perpendicular al eje. El eje es una recta frontal, luego el plano que contiene al giro es proyectante, de canto (#110). El arco que se describe en el giro se proyecta sobre el cuadro según una recta, que coincide con una de las alturas del triángulo de trazas y con una de las proyecciones de los ejes (en el ejemplo el y). La posición final de **O** se escribe **(O)** y estará sobre esa línea. Si conociéramos esa posición final, uniéndola con los vértices del triángulo de trazas (que son puntos de los ejes coordenados que no se mueven en el giro), obtendríamos los ejes abatidos **(*x*)** e **(*y*)** y, como ese plano está abatido sobre el cuadro, se vería en verdadera magnitud el ángulo recto que forman. De ahí se deduce que **(O)** debe estar también sobre la semicircunferencia que se tiende sobre el lado del triángulo. 12

38. Abatidos los ejes podemos llevar sobre ellos unidades, escalas, etc., y «desabatir», empleando en sentido contrario la misma dirección de abatimiento **O'-(O)**. 12

Axonometría ortogonal; distancia del origen al cuadro

39. El plano proyectante que contiene a uno de los ejes contiene evidentemente a su proyección y a las rectas proyectantes que proyectan sus puntos, una de las cuales es **O-O'**. 13

40. Si abatimos el plano proyectante de uno de los ejes, el giro a efectuar es de 90º. 13

41. Este plano proyectante de uno de los ejes contiene un triángulo rectángulo: una de las alturas del triángulo de trazas es la hipotenusa y el eje un cateto. Es rectángulo en el ángulo del vértice **O**. 13

42. Del abatimiento de **O** podemos decir en este caso lo mismo que antes: quedará sobre la perpendicular el eje de giro (en este caso la altura del triángulo de trazas) y sobre la semicircunferencia correspondiente. 13

43. Habiendo abatido el plano proyectante de uno de los ejes vemos en verdadera magnitud el segmento **O-O'**, que es la distancia del origen al cuadro. 13

44. Con otro triángulo de trazas (semejante) el cuadro quedaría en otra posición (paralela) y la distancia del origen al cuadro sería distinta.

45. Disponiendo de la distancia del origen al cuadro es sencillo representar una vista perpendicular a la primera. 13

Caballera; graduación de los ejes

46. En perspectiva caballera o militar, todo lo que contiene el cuadro o los planos paralelos a él está en verdadera magnitud. 14

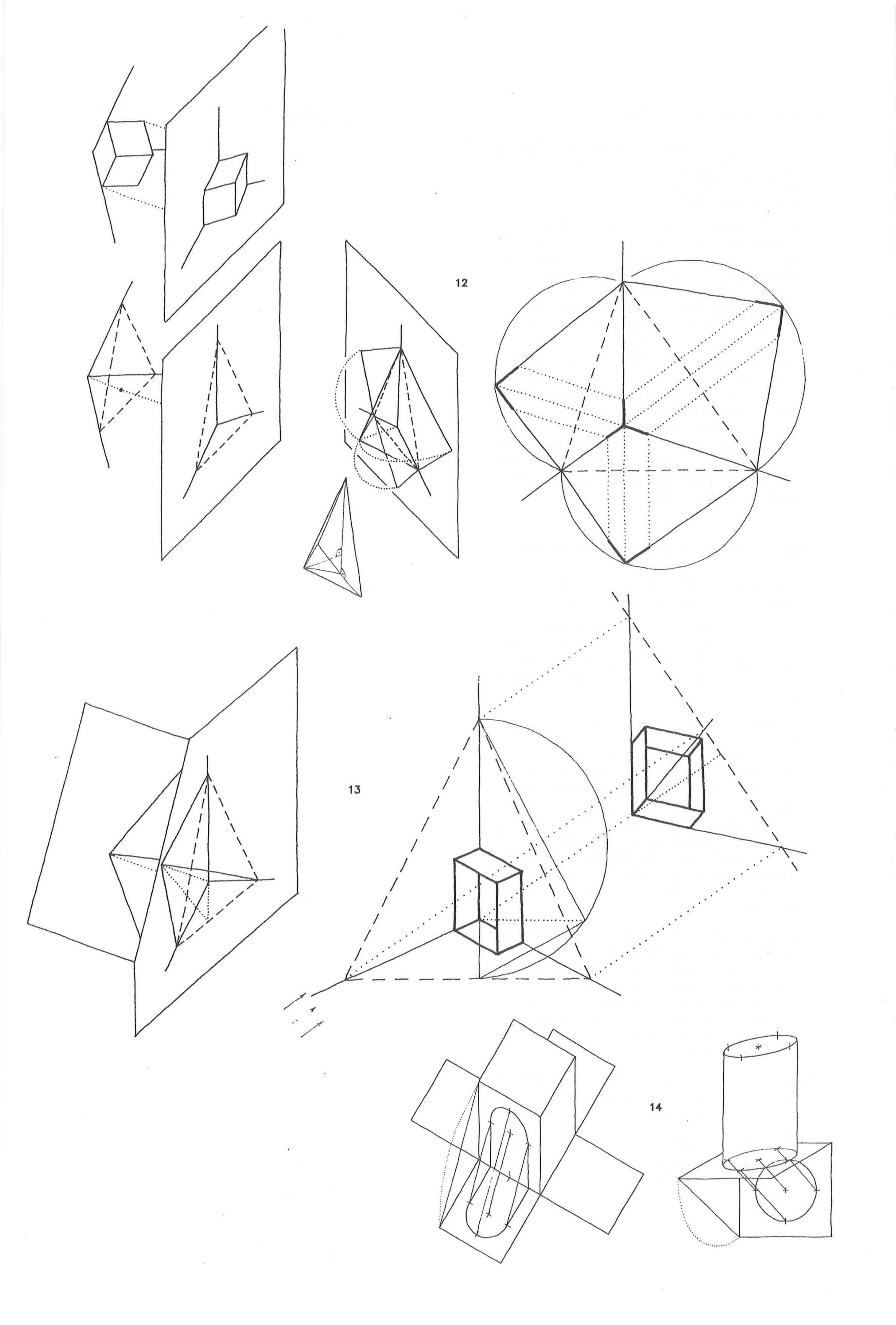
47. Las figura de los otros dos planos coordenados quedan distorsionadas por la proyección. 14

48. Podemos abatir estos planos coordenados sobre el cuadro. 14

49. Cada punto describirá en el giro un cuarto de circunferencia. Si unimos la posición inicial y la posición final del punto obtenemos la dirección de abatimiento, que es igual para todos los puntos del plano que abatimos. 14

50. Si en el abatimiento giramos un punto **P** hasta **(P)** se formará un triángulo cuyos lados son: **P'-(P)**, la perpendicular desde **P** hasta el cuadro, el abatimiento de esa perpendicular. Para cualquier otro punto de ese plano el triángulo que se forma es semejante. 14

51. Podemos transformar una figura abatida en su proyección, y viceversa, construyendo un triángulo semejante para cada punto, o siguiendo las leyes de la transformación afín entre las dos figuras. 14


12
13
14

Axonometría oblicua no caballera

52. Además de la caballera y la axonometría ortogonal podemos imaginar la axonometría oblicua no caballera, es decir, con el triedro en cualquier posición. Su uso no es habitual.

53. En la axonometría ortogonal, determinados los ejes quedan fijadas las escalas (y viceversa). Pero en la axonometría oblicua no caballera podemos fijar libremente las tres direcciones de los ejes y las tres escalas. El teorema de Pohlke garantiza que tres segmentos concurrentes sobre un plano se pueden considerar siempre como proyección de las tres aristas de un cubo. Este teorema se demostró a mediados del siglo XIX; hasta entonces era posible, naturalmente, emplear este sistema de representación (situando los puntos por sus coordenadas, por ejemplo), pero nada garantizaba que se tratara de una forma de proyección plana. El teorema fue enunciado sin demostración; se advirtió que no era claro y que había que demostrarlo, y entre ese momento y la publicación de primera demostración pasaron seis años (es decir, no fue fácil).

Perspectiva cónica; control de la imagen resultante

54. La perspectiva cónica es una proyección sobre un plano desde un punto propio del espacio.

55. El plano horizontal de referencia se llama *geometral* (esta palabra es un galicismo). El plano horizontal a la altura del punto de vista se llama *del horizonte*. El centro de proyección se llama *punto de vista*. — 15

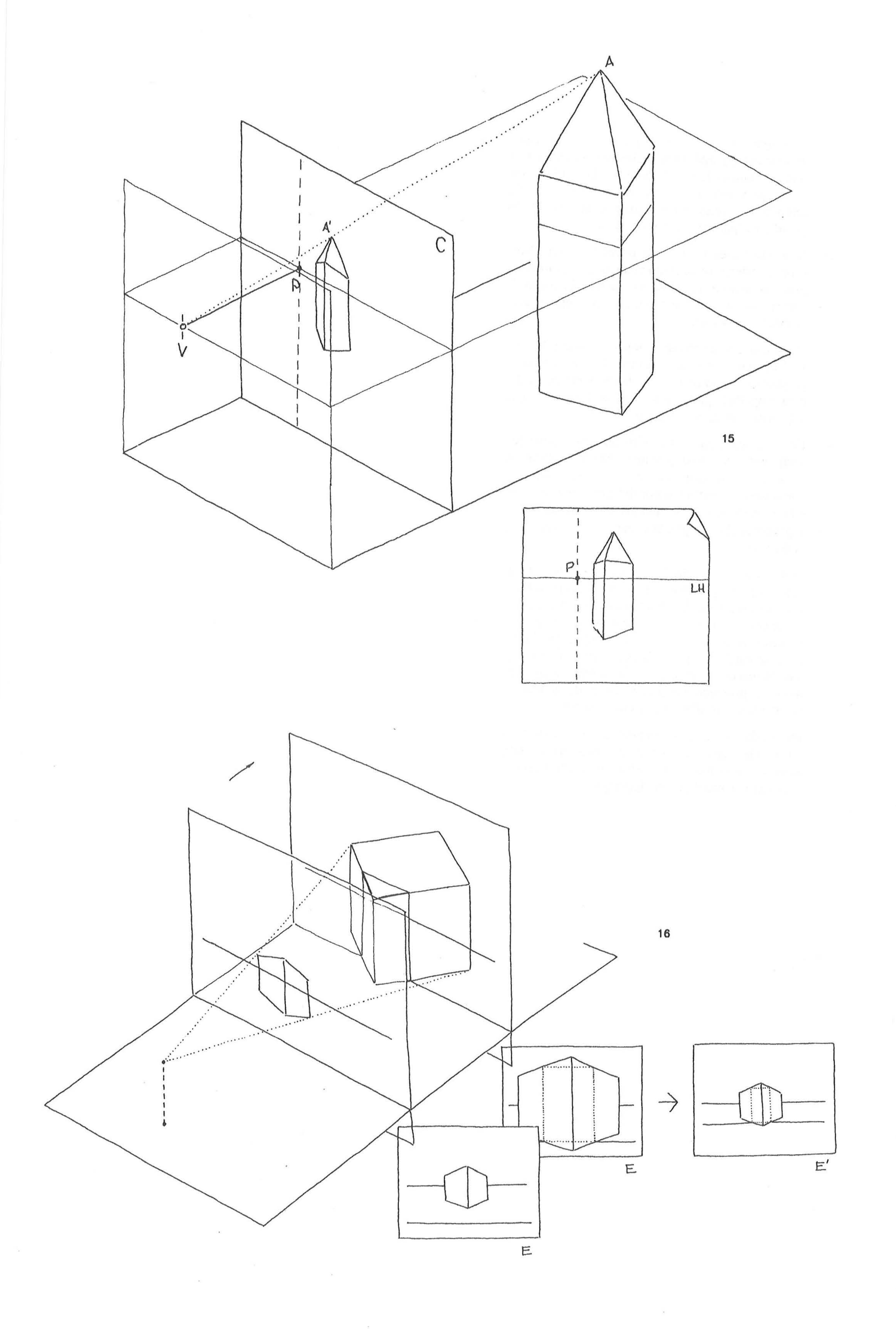
56. La perpendicular del origen al cuadro se llama *dirección principal*. El pie de esa perpendicular (proyección ortogonal del origen) se llama *punto principal*. La distancia entre el punto de vista y el punto principal se llama simplemente *distancia*. La intersección del cuadro con el plano del horizonte se llama *línea del horizonte*. La intersección del cuadro con el geometral se llama línea de tierra, pero es posible (y en mi opinión recomendable) olvidarse de ella durante el trazado. Si el cuadro es vertical, el punto principal está sobre la línea del horizonte. — 15

57. Si el cuadro se mueve manteniendo su orientación, y el punto de vista permanece en su lugar (en consecuencia cambia la distancia), la imagen se hace más grande o más pequeña, pero no cambia de aspecto (como en #12 y #23). Si el cuadro se mueve manteniendo su orientación, la línea del horizonte corta a la imagen siempre de la misma manera, pero la línea de tierra no. — 16

58. El cambio de distancia focal en la fotografía permite hacer la imagen más grande o más pequeña, pero la imagen es la misma; es como la *distancia* de la perspectiva y como el *zoom* en los programas de CAD. Una fotografía con un objetivo de 50 mm es simplemente la ampliación de un trozo de fotografía con un objetivo de 23 mm.

figuras

59. Es decir, la imagen no cambia de forma al mover paralelamente el cuadro; pero sí al acercar o alejar el punto de vista respecto del objeto (#76).


A
A'
C
P
V
15
P
LH
16
E
E'
E

figuras

60. La proyección de cualquier punto sobre el cuadro es su imagen, y estará por encima o por debajo de la línea del horizonte y a la derecha o la izquierda del punto principal. En consecuencia puede quedar referida a la línea del horizonte y la vertical del punto principal por sus coordenadas. 17

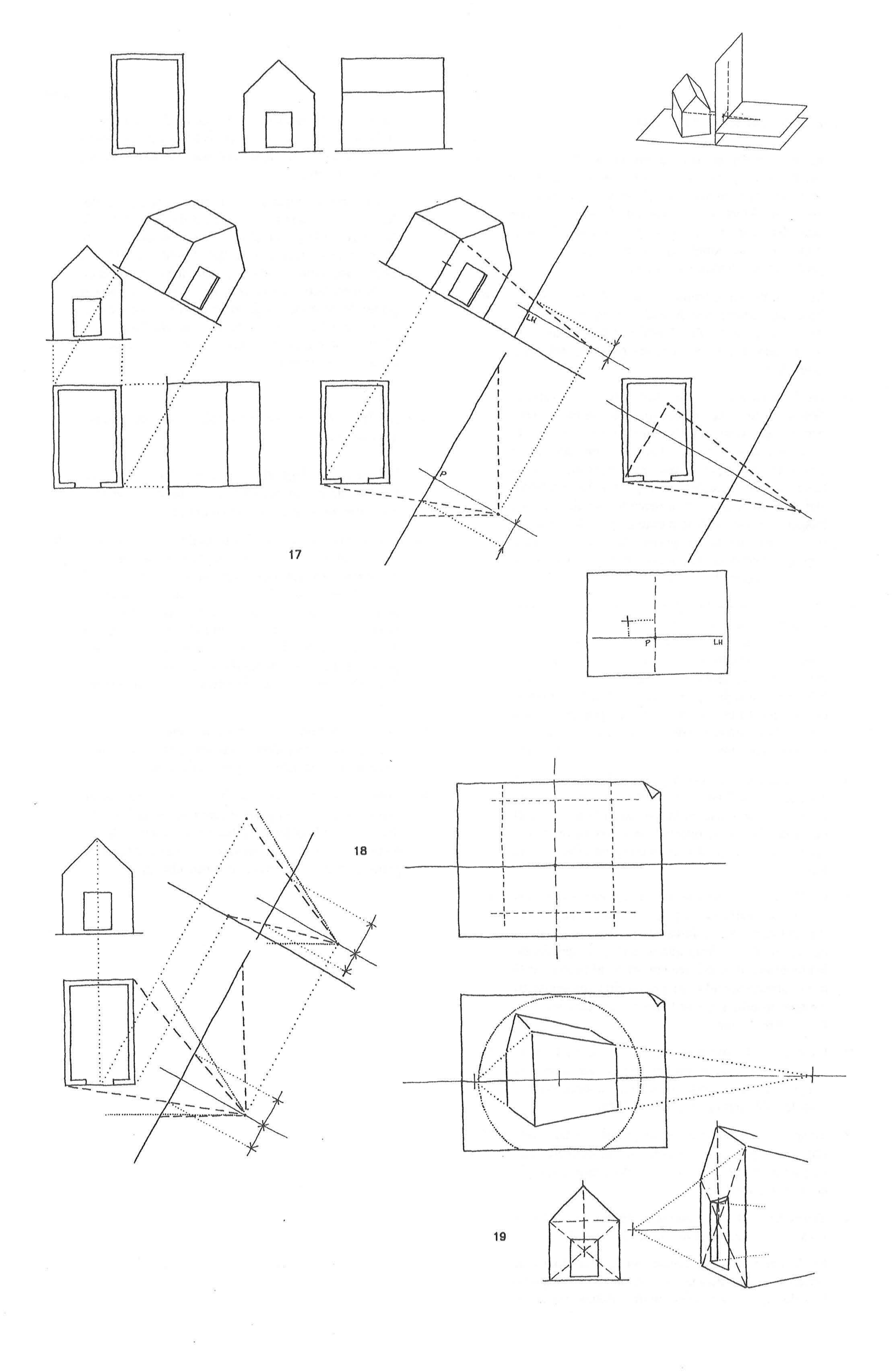
61. Si el cuadro es vertical, es proyectante en planta (#109), es decir, se ve como una recta, y la dirección principal aparece perpendicular a ella. El punto de intersección de una recta con un plano proyectante es inmediato (#128). 17

62. Representando en planta el objeto, el punto de vista y el cuadro, podemos encontrar la posición de la proyección de un punto, con la distancia en verdadera magnitud que le separa (a la derecha o a la izquierda) del punto principal. 17

63. En un alzado donde el cuadro sea proyectante (de perfil, #109), veremos igualmente (#128) la distancia entre la proyección del punto y la línea del horizonte (por encima o por debajo). (Este trazado, que se hará para pocos puntos iniciales, se puede superponer al de la planta como indica la figura de la derecha.) 17

64. Con las dos coordenadas (distancia en horizontal hasta el punto principal y en vertical hasta la línea del horizontal), queda situado cualquier punto sobre la perspectiva. Haciendo esto con dos o tres puntos y continuando con otros recursos (fugas, divisiones, etc.), se puede completar la perspectiva sin necesidad de receta ninguna, y con la ventaja de conocer desde el principio las proporciones de la imagen resultante y controlar su situación y tamaño. 19

65. Previendo cuáles serán los puntos más a la derecha y más a la izquierda, y los puntos más arriba y más abajo de la imagen perspectiva, podemos ajustarla al espacio de papel de que dispongamos. 18


LH
P
17
P
LH
18
19

Perspectiva cónica, puntos y rectas

66. La proyección cónica de un punto **A** sobre el cuadro es un punto **A'**, pero ese **A'** es imagen de otros muchos: todos los del rayo proyectante. Si queremos determinar la posición de **A** necesitamos otra condición, tal como la proyección A'_1 de la proyección ortogonal A_1 sobre el geometral. La pareja A'-A'_1 determina el punto **A**. 20

67. Si **A'** está por encima (debajo) de la línea del horizonte, ocurre que **A** está por encima (debajo) del punto de vista. Si **A'** está por encima de A'_1 , ocurre que **A** está por encima (debajo) del plano geometral. 20

68. En la perspectiva todos los puntos del espacio tienen imagen, excepto los que quedan en el plano paralelo al cuadro por el punto de vista (*plano de desvanecimiento*) y los que está por detrás del punto de vista (que se pueden proyectar, pero no tiene sentido hacerlo). Los puntos infinitamente alejados en cualquier dirección también tienen imagen, porque evidentemente es posible trazar un rayo visual desde el punto de vista al punto impropio que queremos representar y encontrar su intersección con el cuadro.

69. Podemos considerar que el Sol es un punto infinitamente alejado; quedará determinado por su proyección directa **S'** y la proyección de su proyección horizontal S'_1, que estará sobre la línea del horizonte, porque también será un punto infinitamente alejado. En el caso del Sol tiene sentido la representación aunque esté por detrás del espectador, porque puede servir para el trazado de las sombras (entonces estaría **S'** por debajo de S'_1) 20

70. La imagen del punto impropio de una recta se obtiene así, uniendo ese punto con el punto de vista, es decir, trazando la paralela a la recta por el punto de vista, y encontrando la intersección con el cuadro; se llama punto *de fuga* o punto *límite* de la recta. 21

71. La línea del horizonte es la perspectiva de los puntos infinitamente alejados del plano geometral. (En un paisaje real la línea del horizonte es el límite de la parte de la Tierra que vemos, y, despreciando la topografía, es una línea curva). Si el punto **S** está infinitamente alejado, su proyección ortogonal S_1 también lo estará, y por tanto S'_1 quedará sobre la línea del horizonte. 20

72. La imagen de una recta es una recta. Si la recta encuentra al cuadro en un punto (su traza), la imagen de la recta pasa por él. La perspectiva de la recta también pasa por su punto de fuga. 21

73. Todas las rectas paralelas tienen el mismo punto impropio y por tanto sus perspectivas convergen en un punto de fuga o proyección del punto impropio común (#70 y #77). 21

74. Todas las rectas horizontales tienen su punto de fuga sobre la línea del horizonte (#70 y #77).

75. En la perspectiva se conservan las relaciones de pertenencia y tangencia. Una trama geométrica o un trazado regulador pueden ahorrar trabajo en el trazado. Los extremos de los peldaños de una escalera o los cruces de un suelo de baldosas no se sitúan uno por uno, sino aprovechando las alineaciones, diagonales, etc.

76. Si el punto de vista se elige muy cerca del objeto, los puntos de fuga principales quedan muy cerca de la imagen y la perspectiva resulta con una convergencia muy llamativa. Al alejar el punto de vista del objeto, los puntos de fuga quedan más apartados de la imagen, pero se suavizan las convergencias. Un punto de vista muy alejado se acerca a una proyección paralela; esto puede ser aprovechado para obtener caballeras en los programas de CAD que no ofrecen esta opción.

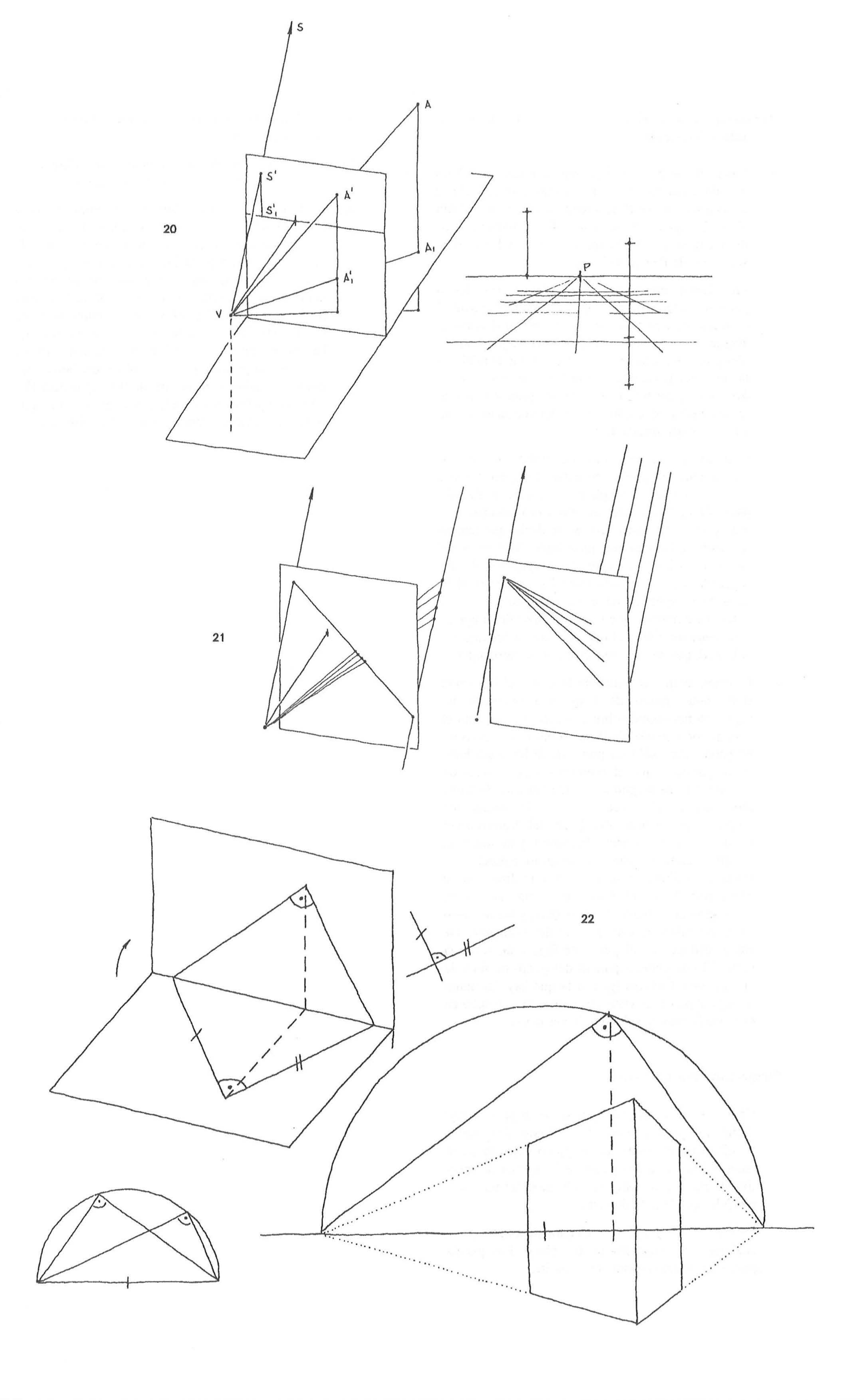
Perspectiva cónica; perpendicularidad de rectas horizontales

77. El punto de fuga de una dirección se obtiene trasladando esa dirección hasta el punto de vista y encontrando su intersección con el cuadro.

78. Dadas dos direcciones horizontales y ortogonales entre sí, al trazar las paralelas por el punto de vista tendremos también dos rectas ortogonales sobre el plano de horizonte. Para ver esa perpendicularidad podemos abatir el plano del horizonte sobre el cuadro. Entonces quedan sobre el cuadro el punto de vista abatido **(V)** y la distancia hasta el punto principal **P**, y el triángulo que forman las dos direcciones con la línea de tierra, que es rectángulo en **(V)**. 22

79. Si dos direcciones son perpendiculares entre sí, en la perspectiva **(V)** debe estar sobre la semicircunferencia tendida sobre sus puntos de fuga. 22

80. Conociendo los puntos de fuga de dos direcciones perpendiculares y la posición de **P** sobre la línea de tierra, se puede obtener la distancia. Conociendo un punto de fuga, **P** y la distancia, se puede obtener el punto de fuga de la dirección perpendicular.


S
A
S'
A'
S'1
20
A1
P
A'1
V
21
22

Perspectiva cónica; divisiones y proporciones en frontales y horizontales

81. Las rectas frontales del geometral quedan paralelas a la línea del horizonte. Las rectas perpendiculares al cuadro fugan en **P**. Las rectas que forman 45º con el cuadro fugan en los puntos **Ć**, llamados puntos de distancia, que están sobre la línea del horizonte separados de P en una *distancia*. 23

82. Las figuras que están sobre planos frontales o paralelos al cuadro se ven en su verdadera magnitud (con los ángulos y las proporciones sin distorsión, aunque más pequeños cuanto más lejos esté el plano frontal). Las rectas verticales, las paralelas a la línea del horizonte o a la línea de tierra, y las frontales en general, conservan las proporciones de los segmentos que contienen y en consecuencia se pueden dividir directamente. 23

83. Para dividir un segmento horizontal en partes o proporciones, se puede proyectar el segmento sobre una recta frontal de su plano horizontal, utilizando para ello cualquier haz de rayos proyectantes que sean paralelos y horizontales, es decir, que tengan su punto de fuga en cualquier lugar de la línea del horizonte. (Este concepto de proyección de un segmento sobre una recta frontal se generalizará al tratar la perspectiva de cuadro inclinado en #93; nótese de momento que se está realizando la operación sobre un plano, el que contiene al segmento y la frontal, que en este caso es un plano horizontal.) 24

84. Es decir, cualquier punto de la línea del horizonte sirve como punto de fuga para proyectar un segmento horizontal sobre una recta frontal, con el objeto, por ejemplo, de llevar sobre él una división en partes. Pero sólo un punto de la línea del horizonte garantiza que el segmento y su proyección tienen la misma magnitud (en la realidad). Se llama *punto de medida*, porque nos da la medida del segmento proyectada sobre la frontal. Vamos a ver dónde está. Entre la recta, la frontal, y la dirección de proyección, forman un triángulo isósceles; al trasladar la dirección de la recta y la dirección de proyección hasta el punto de vista, ambas se encuentran en el plano del horizonte, y forman otro triángulo isósceles con la recta del horizonte. De ahí se deduce que el punto de fuga está, sobre la recta del horizonte, separado del punto de fuga de la recta una distancia igual a la que hay del punto de fuga al punto de vista. (El concepto se amplía en #93 para la medida sobre cualquier plano.) 25

Perspectiva cónica; planos

85. Como las rectas tienen punto de fuga o punto límite, los planos tienen recta límite: los puntos infinitamente alejados de un plano constituyen la recta impropia de ese plano, y la imagen perspectiva de esa recta impropia es la traza de un plano paralelo por el punto de vista.

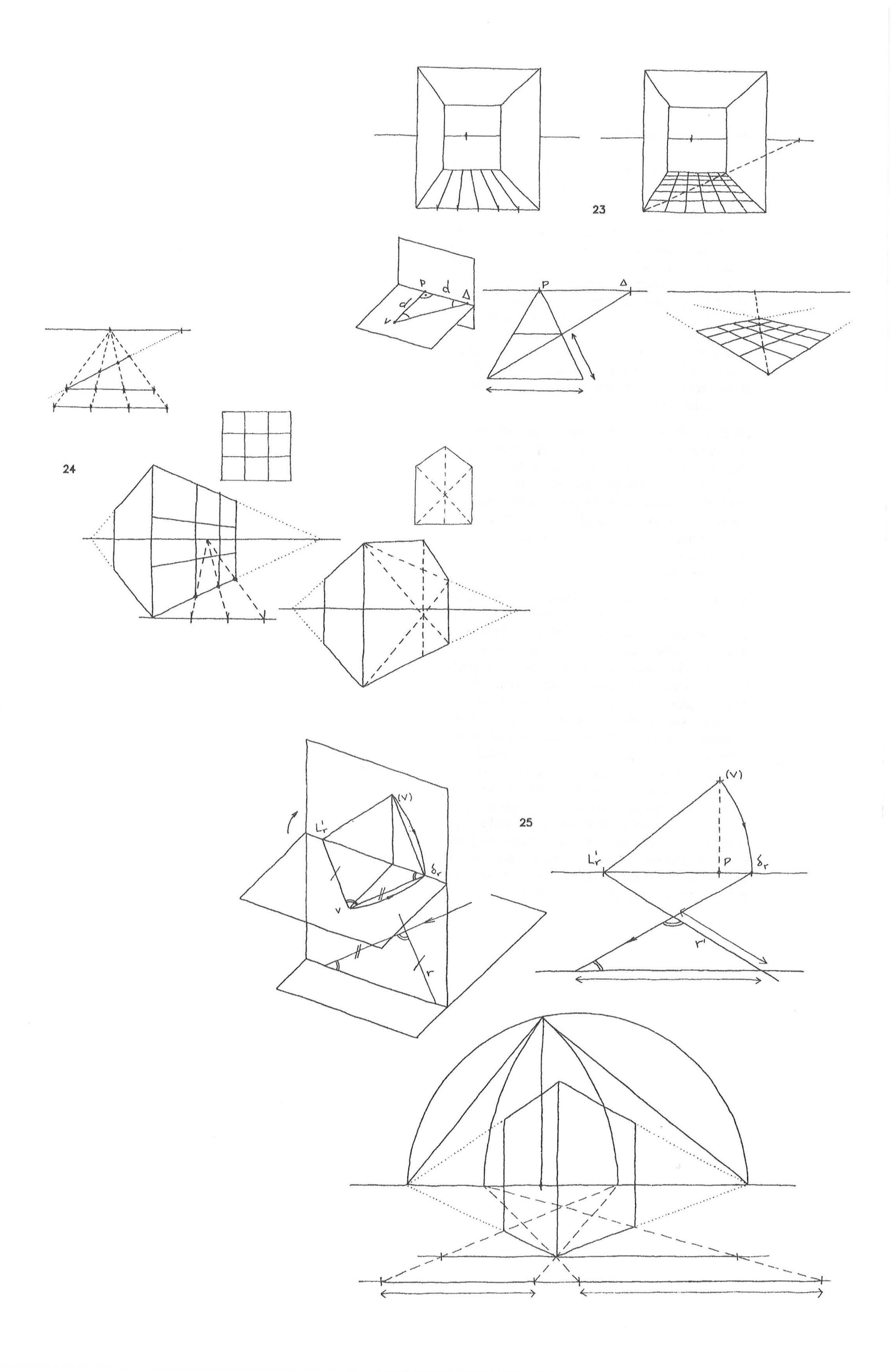
86. La recta límite de un plano es paralela a la traza o a cualquier otra recta frontal del plano. Los planos paralelos tienen la misma recta límite.

figuras

87. La línea del horizonte es la recta límite de los planos horizontales.

88. Si un plano contiene a una recta, la recta límite del plano contiene al punto límite o de fuga de la recta.

89. Dado un plano, el paralelo por el punto de vista (mencionado en #85) marca su recta límite. Si el plano contiene rectas, el paralelo por el punto de vista contiene las paralelas a esas rectas, que marcan los puntos de fuga. Es posible abatir éste (el paralelo por V), con eje de giro en la recta límite, para situar sobre el cuadro tanto el punto de vista **(V)** (V abatido) como las diversas direcciones de las rectas. En el caso del plano geometral (#78), abatiendo el paralelo por V (el plano del horizonte) sobre el cuadro (con un giro de 90º) aparecerá **(V)** sobre una perpendicular a la línea del horizonte por el punto principal y separado de éste la distancia. 22


23
p
d
Δ
v
24
25
(V)
L'_r
δ_r
r
r'

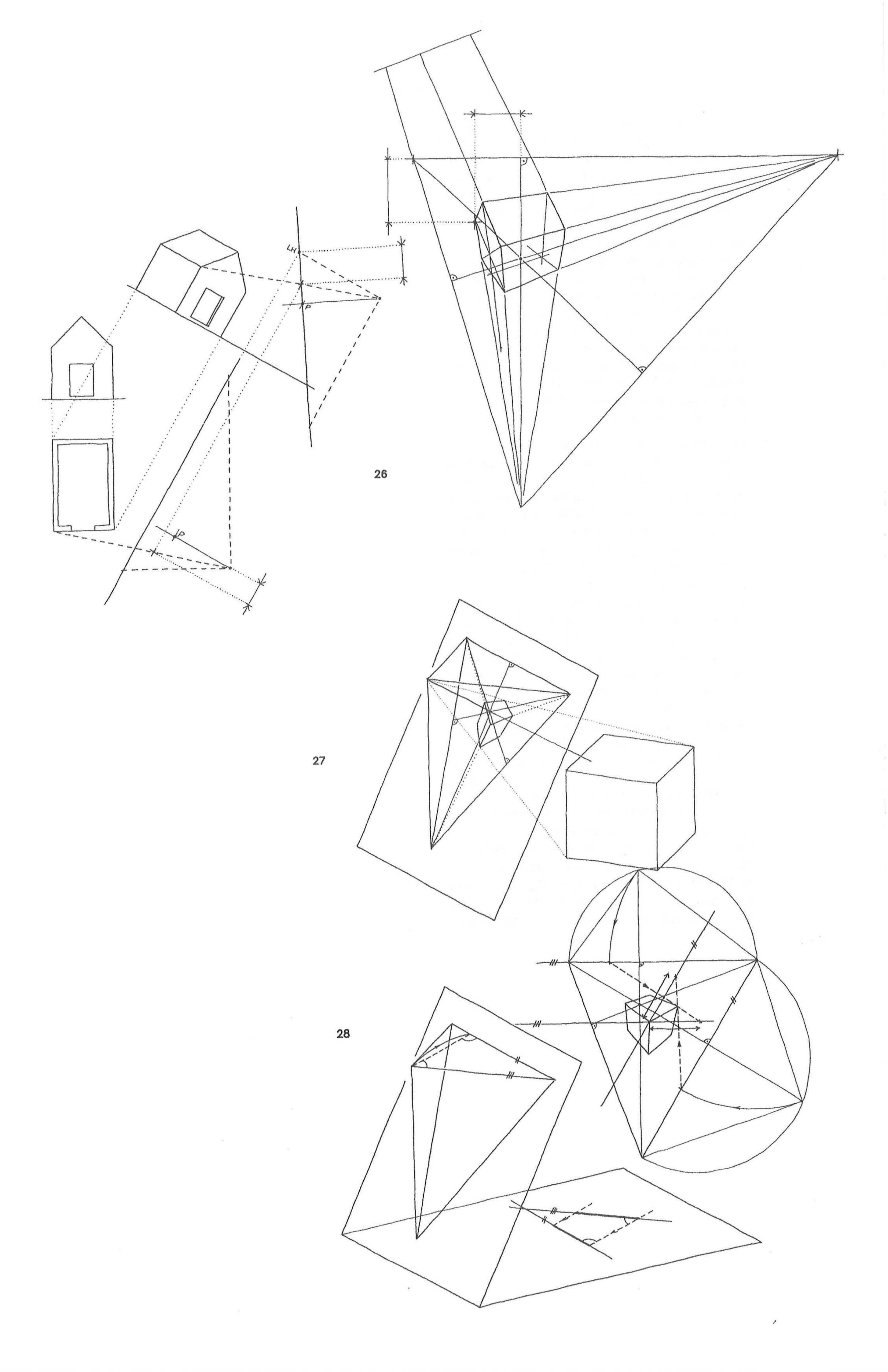
Perspectiva cónica; cuadro inclinado

90. Si el cuadro es inclinado el punto principal no está sobre la línea del horizonte, sino más arriba o más abajo.

91. También podemos fácilmente en diédrico proyectar los puntos sobre el cuadro, como en #60 a #64, cuando éste es inclinado. La intersección de los rayos con el cuadro es inmediata en la proyección vertical que deja el plano del cuadro de canto. Sigue siendo posible referir la proyección de un punto a la línea del horizonte y el punto principal. Al trasladar las verticales hasta el punto de vista se obtiene sobre el cuadro el punto de fuga de las rectas verticales, que está en el cuadro sobre la vertical del punto principal. 26

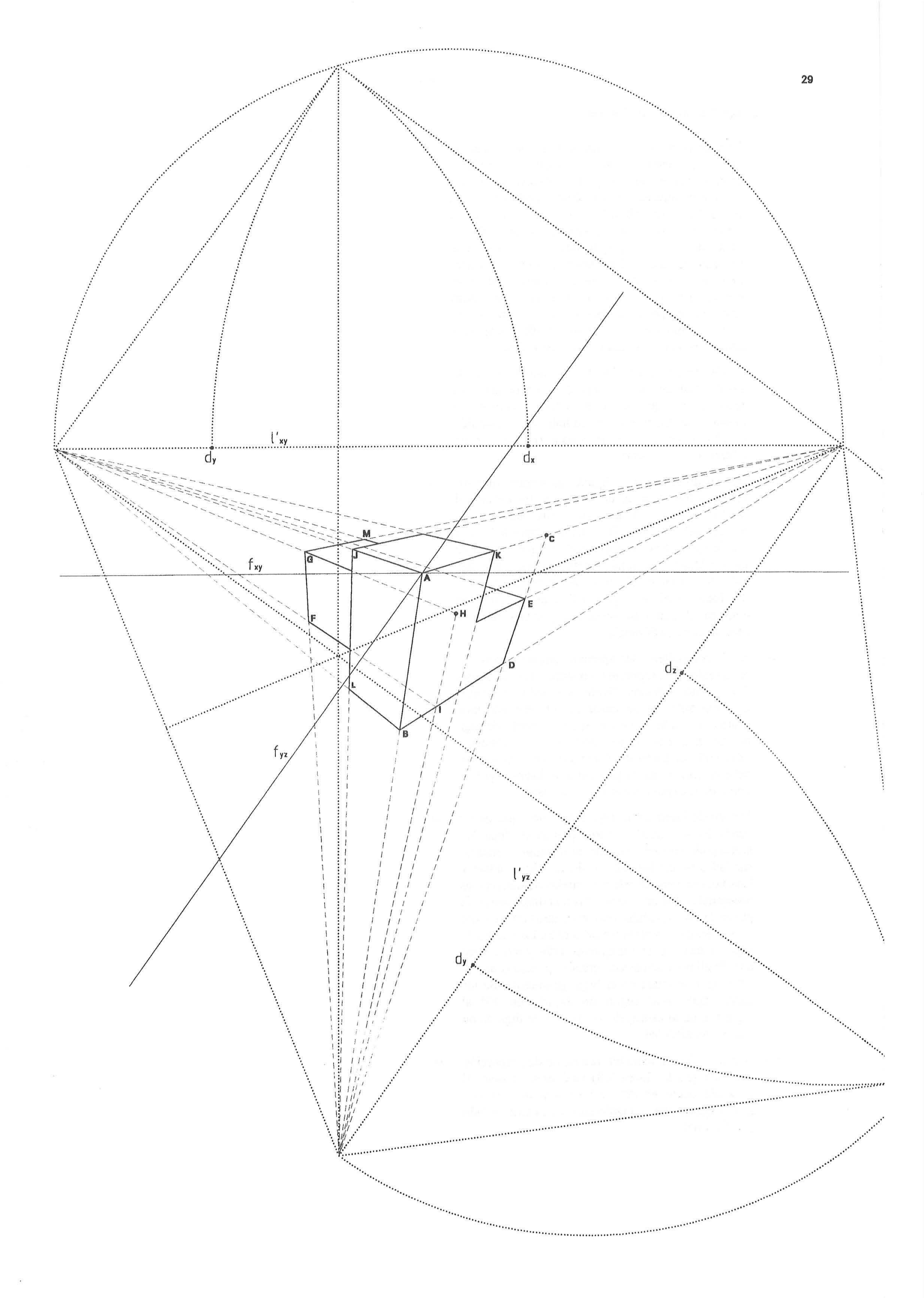
92. El punto de vista y los puntos de fuga de tres direcciones ortogonales forman un triedro trirrectángulo como el de la axonometría (#25, #30, #31 y siguientes). El punto principal es el ortocentro del triángulo de trazas. Los tres planos coordenados se pueden abatir sobre el cuadro, para trabajar sobre ellos. También se puede abatir el plano que contiene a la vertical y la dirección principal, para obtener la distancia. 27

93. Se puede generalizar el concepto de punto de medida (#84): punto de medida es el punto de fuga de la dirección que hay que emplear para proyectar una recta sobre una frontal de manera que se conserven las medidas. Esta proyección se puede efectuar en cualquier plano (en #84 lo hemos hecho sobre un plano horizontal), pero la frontal sobre la que proyectamos debe pertenecer a ese plano. Entre la recta, la frontal, y la dirección de proyección, forman un triángulo isósceles; al trasladar la dirección de la recta y la dirección de proyección hasta el punto de vista, se encuentran en un plano paralelo al de la operación, y forman otro triángulo isósceles con la recta límite. De ahí se deduce que el punto de fuga está sobre la recta límite del plano en el que estamos operando y separado del punto de fuga de la recta una distancia igual a la que hay entre punto de fuga y el punto de vista. 28


LH
P
P
26
27
28

94. Al emplear los puntos de medida de las tres direcciones ortogonales, por ejemplo para restituir (#96) las proporciones del objeto que está en perspectiva, si hay que proyectar sobre rectas frontales, éstas deben encontarse en un mismo plano frontal. Esto se garantiza haciéndolas pasar todas por un punto determinado del objeto. No se puede proyectar un segmento sobre una frontal si ambas rectas no están sobre el mismo plano; en tal caso será posible trasladar «perspectivamente» el segmento hasta el plano de la frontal empleada. Tomar un punto u otro para hacer pasar las rectas frontales supone proyectar sobre un plano frontal más o menos alejado del punto de vista; el resultado es que las medidas obtenidas son todas ellas más grandes o más pequeñas, pero mantienen sus proporciones relativas; de la medida real de una de ellas se deduciría la escala a la que están todas. 29

95. Nota: Al proyectar un segmento desde uno de sus puntos de distancia sobre una recta frontal se conserva su magnitud; pero esta proyección se realiza sobre un plano, el plano que contiene al segmento y a la recta frontal sobre la que se proyecta. El segmento **AB** puede ser proyectado desde el punto $\mathbf{d_z}$ sobre la frontal $\mathbf{f_{yz}}$, porque estamos operando sobre el plano de recta límite $\mathbf{l'_{yz}}$, que pasa por **A,** que contiene a $\mathbf{f_{yz}}$, y que contiene a la cara **ABCD**. También podemos proyectar el segmento **AK** desde el punto $\mathbf{d_y}$ sobre la misma $\mathbf{f_{yz}}$. También podemos proyectar **DE** desde $\mathbf{d_z}$ sobre $\mathbf{f_{yz}}$, etc. (Todos son segmentos situados en el mismo plano.) Pero operativamente sería más cómodo trasladar a la misma línea todas las magnitudes de diversos segmentos paralelos y proyectar después. No podemos proyectar sobre esa frontal (es decir, conservando la misma escala) el segmento **GF**, que no está en ese plano. Para referir la medida de ese segmento a las anteriores podríamos trasladarlo hasta **HI** y entonces proyectar desde $\mathbf{d_z}$ sobre $\mathbf{f_{yz}}$. La frontal $\mathbf{f_{xy}}$ se ha hecho pasar por el punto A, como la $\mathbf{f_{yz}}$. Las dos son rectas del mismo plano frontal. Las medidas que trasladеmos sobre ellas están a la misma escala. Sobre la frontal $\mathbf{f_{xy}}$ podemos proyectar los segmentos **AK** (con $\mathbf{d_y}$ de $\mathbf{l'_{xy}}$), y **AJ** (con $\mathbf{d_x}$), y todos los contenidos en ese plano, pero no el **BD**, por ejemplo, que se podría medir trasladado a **AC.** 29


l'xy
dy
dx
M
C
G
J
K
fxy
A
E
H
F
D
dz
L
I
B
fyz
l'yz
dy

Perspectiva cónica; restitución

96. Llamamos *restituir* a encontrar la forma real, es decir, representar la planta y alzados, de un objeto representado en una perspectiva cónica. A partir de la simple imagen de un objeto cualquiera (una fotografía o un dibujo) no podemos conocer la forma real; cada punto podría estar en cualquier lugar de su rayo proyectante, de manera que infinitos objetos podrían tener la misma imagen. Pero si se trata de un objeto arquitectónico es normal que sepamos algo sobre él (que ciertas líneas son perpendiculares o paralelas o que se dan ciertas proporciones), y entonces podemos aprovechar estos datos para iniciar una restitución.

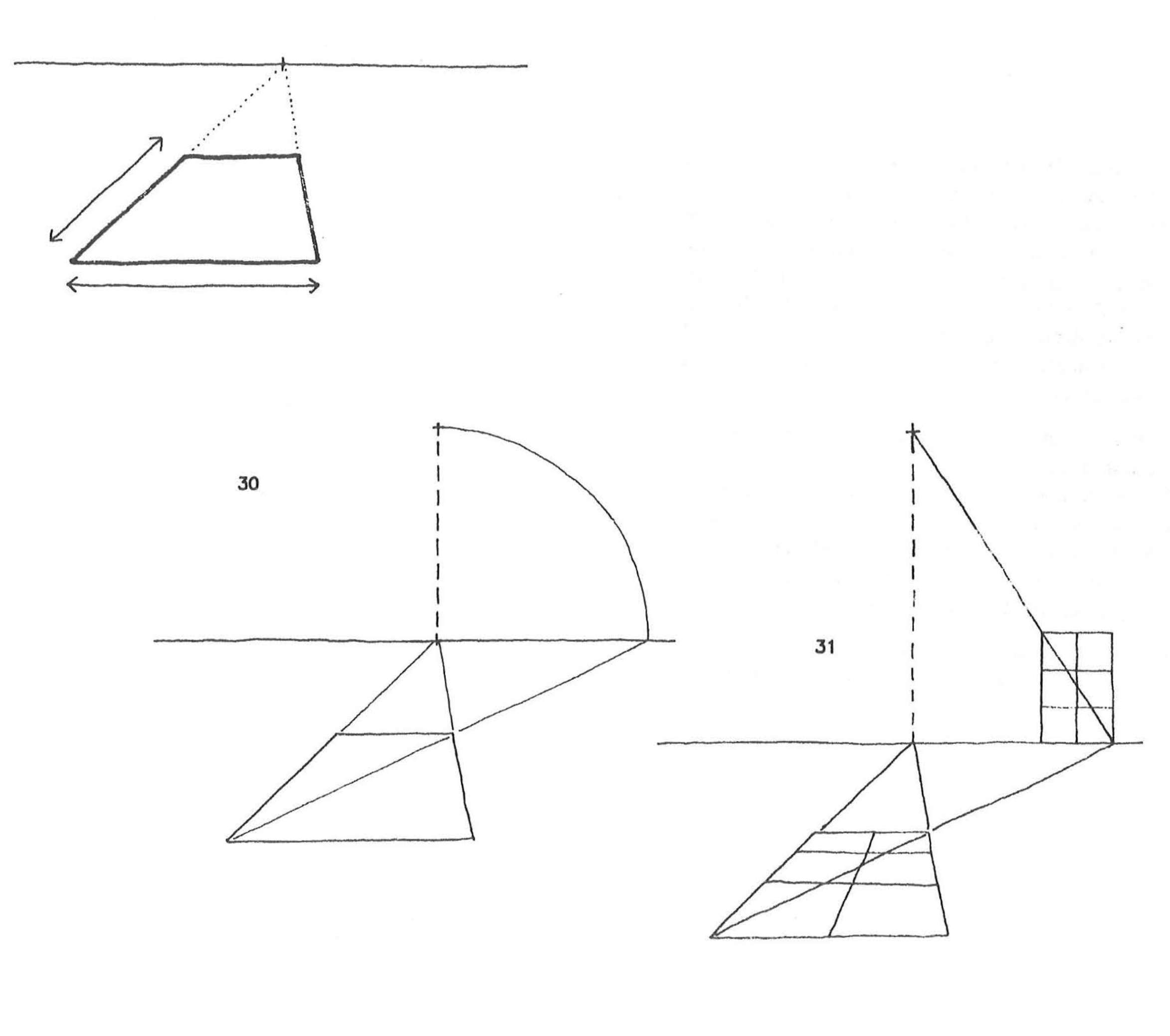
97. Si además de conocer la forma conocemos una de sus dimensiones (la hemos medido, o hay una regla apoyada en algún sitio), entonces conocemos su tamaño real. En caso contrario habríamos restituido el objeto sin conocer la escala (podría ser un edificio o su maqueta).

98. Del cuadrilátero de la figura suponemos que sus cuatro lados están en un mismo plano horizontal (podría no ser así), que los cuatro ángulos son rectos (podría no ser así), y que los cuatro lados son iguales (podría no ser así). Es decir, que se trata de un cuadrado horizontal. Además vemos que dos lados son frontales. Entonces sabemos que los otros dos fugan en el punto principal, y que su diagonal fuga en el punto de distancia, y conocemos en consecuencia la distancia. 30

99. Si el cuadrilátero del apartado anterior fuera un rectángulo de proporción conocida (en la figura 2/3), como sabemos dividir sus lados podemos construir sobre él un cuadrado. O bien podemos restituir el punto de vista a partir del punto de fuga de la diagonal, cuya dirección es conocida (abatiendo el plano del horizonte sobre el cuadro debe cumplirse que la paralela a la diagonal por su punto de fuga pasa por el punto de vista). 31

100. Del cuadrilátero de la figura sabemos que es un cuadrado horizontal con dos puntos de fuga (en teoría podría no ser cuadrado, ni rectángulo, incluso sus lados no coplanarios, ni siquiera horizontales). Entonces disponemos de dos parejas de direcciones ortogonales (los dos lados y las dos diagonales). El punto de vista (abatido sobre el cuadro) estará sobre las semicircunferencias tendidas entre los puntos de fuga de direcciones ortogonales (#78 y #79). Pero una de ellas es demasiado grande; podemos añadir entonces que estará en el lugar geométrico de los puntos que 'ven' según un ángulo de 45° al segmento (arco capaz) de los puntos de fuga de un lado y una diagonal. 32

101. Si el cuadrilátero fuera un rectángulo de proporción conocida (en la figura 2/3) podríamos buscar el cuadrado como en #99, o bien operaríamos con arcos capaces con el ángulo conocido entre un lado y la diagonal. 33



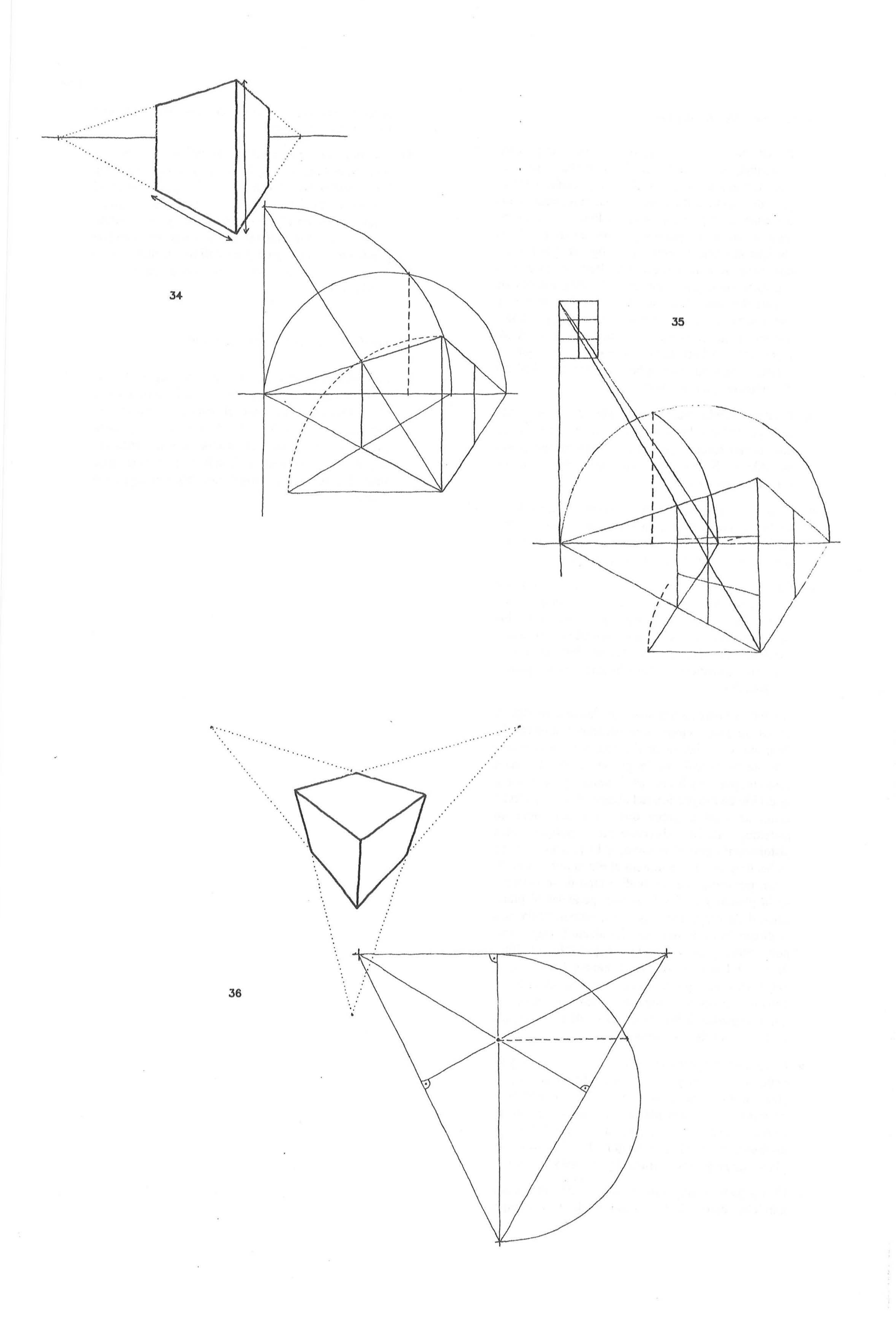
32

33

102. Del prisma de la figura sabemos que las dos caras vistas son planos ortogonales entre sí, y que la derecha es un cuadrado. El punto de vista abatido está sobre la semicircunferencia de los puntos de fuga ortogonales y el punto de medida de lados horizontal del cuadrado nos permite la restitución. Se ha señalado también la diagonal y su fuga en el punto de la recta límite del plano que es el de fuga de esa dirección. 34

103. Si en el caso anterior dispusiéramos de un rectángulo de proporción conocida (en la figura 2/3), buscaríamos el punto de medida a partir de un cuadrado o bien abatiendo el plano que pasa por el punto de vista y la recta límite (#89: en él debe cumplirse que la paralela a la diagonal por su punto de fuga pasa por el punto de vista) 35

104. Si se trata de un ortoedro con tres puntos de fuga, la restitución es inmediata por lo explicado en #92. 36



34
35
36

Sistema diédrico, conceptos

105. El sistema diédrico, o sistema de doble proyección ortogonal, es una coordinación de la planta, proyección horizontal, y el alzado, proyección vertical (hay dos 'planos del cuadro'). La intersección los dos planos de proyección es la línea de tierra. Si representamos los planos por sus trazas (diédrico clásico) la línea de tierra debe figurar, porque las dos trazas se cortan sobre ella. Pero si los planos son caras de objetos (diédrico *directo*), los planos vienen determinados por sus elementos, puntos y rectas (una recta y un punto, dos rectas paralelas, dos rectas que se cortan, tres puntos no alineados), y entonces no hace falta la línea de tierra, que, si existe, sería solamente la base del alzado, el plano de referencia para sus cotas. 37

106. Planta y alzado están coordinadas de manera que cada punto tiene las dos proyecciones alineadas en una misma recta, según cierta dirección del plano del dibujo. Si hay línea de tierra esta recta es perpendicular a ella. 37

107. La planta y el alzado (el alzado con su base o línea de tierra) pueden estar más o menos distanciados según la comodidad del que los usa, y esto no cambia en nada la forma de los objetos. 37

108. En el espacio físico, vertical y horizontal no son conceptos simétricos, porque, por ejemplo, los planos horizontales son todos paralelos, pero los verticales no, y las rectas verticales son todas paralelas, pero las horizontales no. Sin contar con que nos movemos habitualmente sobre planos horizontales.

109. Las rectas proyectantes son aquellas que en alguna de las dos proyecciones son paralelas a la dirección de proyección: las *verticales* (paralelas a la dirección de proyección de la planta, donde aparecen como un punto) y las rectas *de punta* (paralelas a la dirección de proyección del alzado, donde aparecen como un punto). Sobre una recta cualquiera no podemos medir directamente, porque está distorsionada por el escorzo; sólo podemos medir en las *horizontales* (paralelas al plano horizontal, es decir, perpendiculares a la dirección de proyección de la planta) y en las *frontales* (paralelas al plano vertical de proyección, es decir, perpendiculares a la dirección de proyección del alzado). Hay rectas horizontales y frontales a la vez (paralelas a la línea de tierra). Las verticales son frontales. Las rectas *de perfil* (las dos proyecciones son coincidentes y perpendiculares a la línea de tierra) son las únicas que no quedan definidas si no se dan las proyecciones de dos de sus puntos.

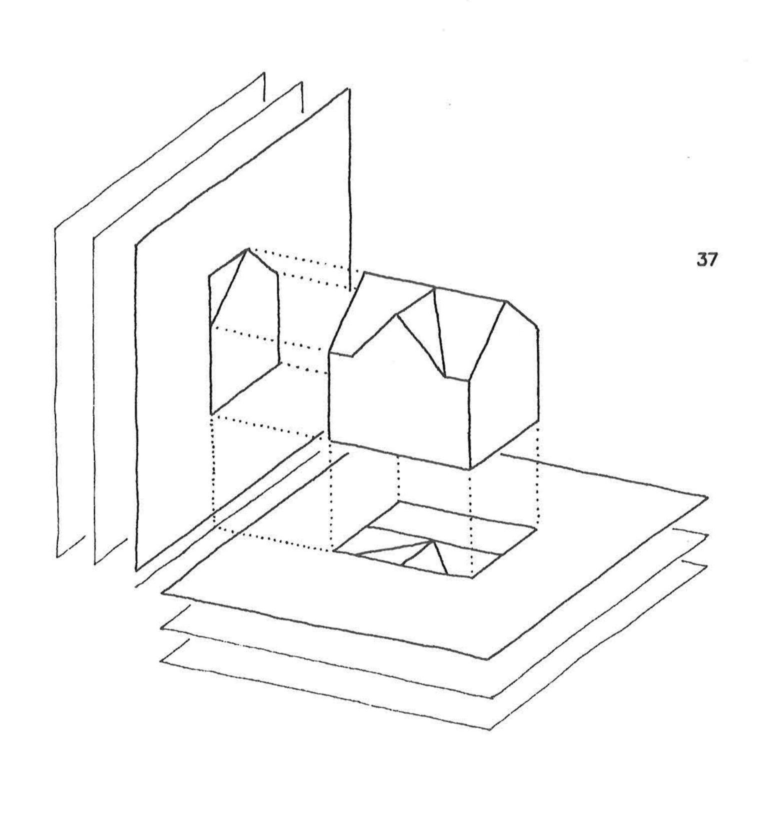
110. Los planos proyectantes son los *verticales* (proyectantes en planta) y los *de canto* (proyectantes en alzado). Los planos que muestran en verdadera magnitud las figuras planas que contienen son los *frontales* (verdadera magnitud en alzado) y los *horizontales* (verdadera magnitud en planta). Los planos *de perfil* son verticales y de canto a la vez.

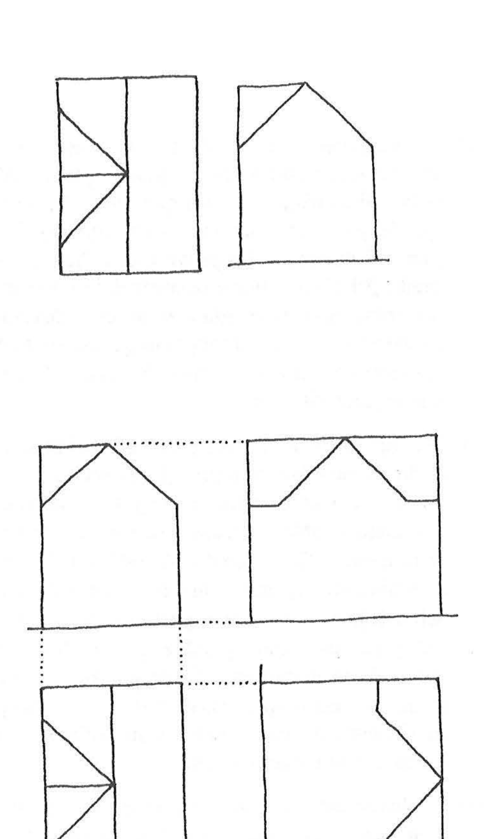
111. En un plano cualquiera todas las horizontales son paralelas entre sí. Un plano cualquiera siempre tiene rectas horizontales, pero no tiene por qué tener rectas verticales.

112. Por un punto de un plano pasan infinitas rectas; una de ellas es horizontal, y la que es perpendicular a la horizontal se llama *recta de máxima pendiente*, y el motivo es evidente. Todas las rectas de máxima pendiente de un plano son paralelas y perpendiculares a las horizontales. Una recta de máxima pendiente es suficiente para definir un plano (sólo hay un plano que tenga esa recta de máxima pendiente).

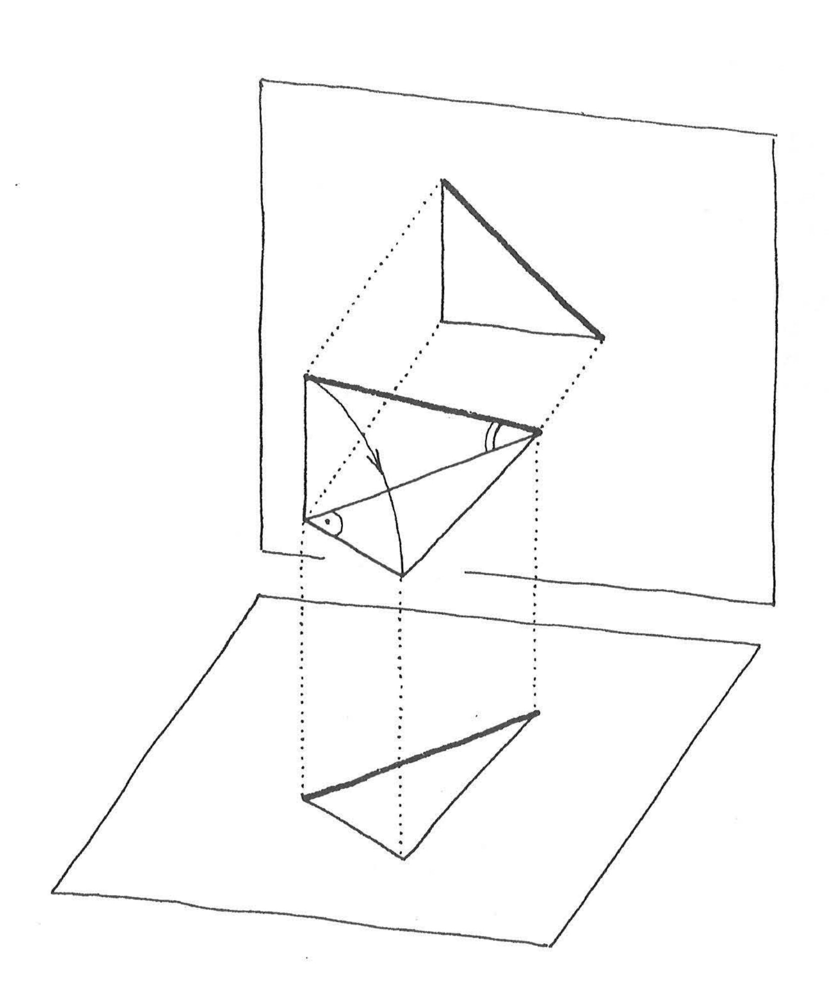
Sistema diédrico, verdadera magnitud

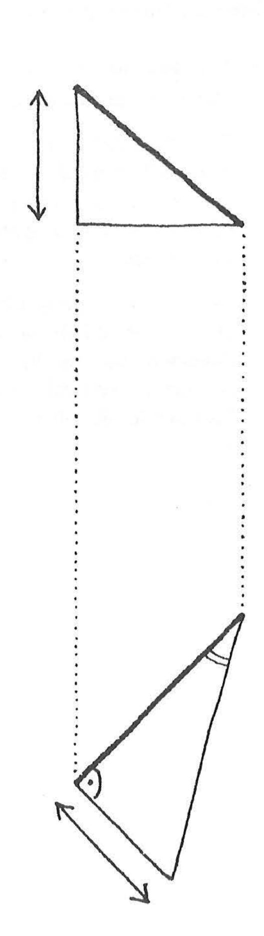
113. La verdadera magnitud de un segmento se encuentra abatiendo su plano vertical: en un giro de 90º situamos horizontal el triángulo rectángulo formado por la diferencia de cotas, la distancia entre las proyecciones horizontales, y la verdadera magnitud del segmento. También podemos girar alrededor de un eje vertical para dejar el segmento frontal. 38





37





38

114. La verdadera magnitud de una figura plana la encontramos abatiendo el plano que la contiene (#35). Si lo abatimos para que quede horizontal, el eje de giro debe ser una recta horizontal de ese plano. Entonces en las proyecciones horizontales un punto del plano antes y después del giro se encuentra sobre una perpendicular al eje (*dirección de abatimiento*), y la verdadera magnitud de la distancia entre el punto y el centro del giro es la distancia que permite situarlo. 39

115. Dos figuras planas, antes y después del abatimiento, están en relación de afinidad: las rectas correspondientes se cortan sobre el eje y los puntos correspondientes están alineados según la dirección de abatimiento. Si el punto **A** está en la recta **a**, naturalmente $\mathbf{A_1}$ está sobre $\mathbf{a_1}$, y también **(A)** está sobre **(a)**. Si una recta **r** pasa por **A**, **(r)** pasa por **(A)** y se corta con $\mathbf{r_1}$ sobre el eje. Por lo tanto, conocido el abatimiento de un punto, es inmediato el de las rectas que pasan por él, y conocido el abatimiento de una recta es inmediato el de las rectas que se cortan con ella. 39

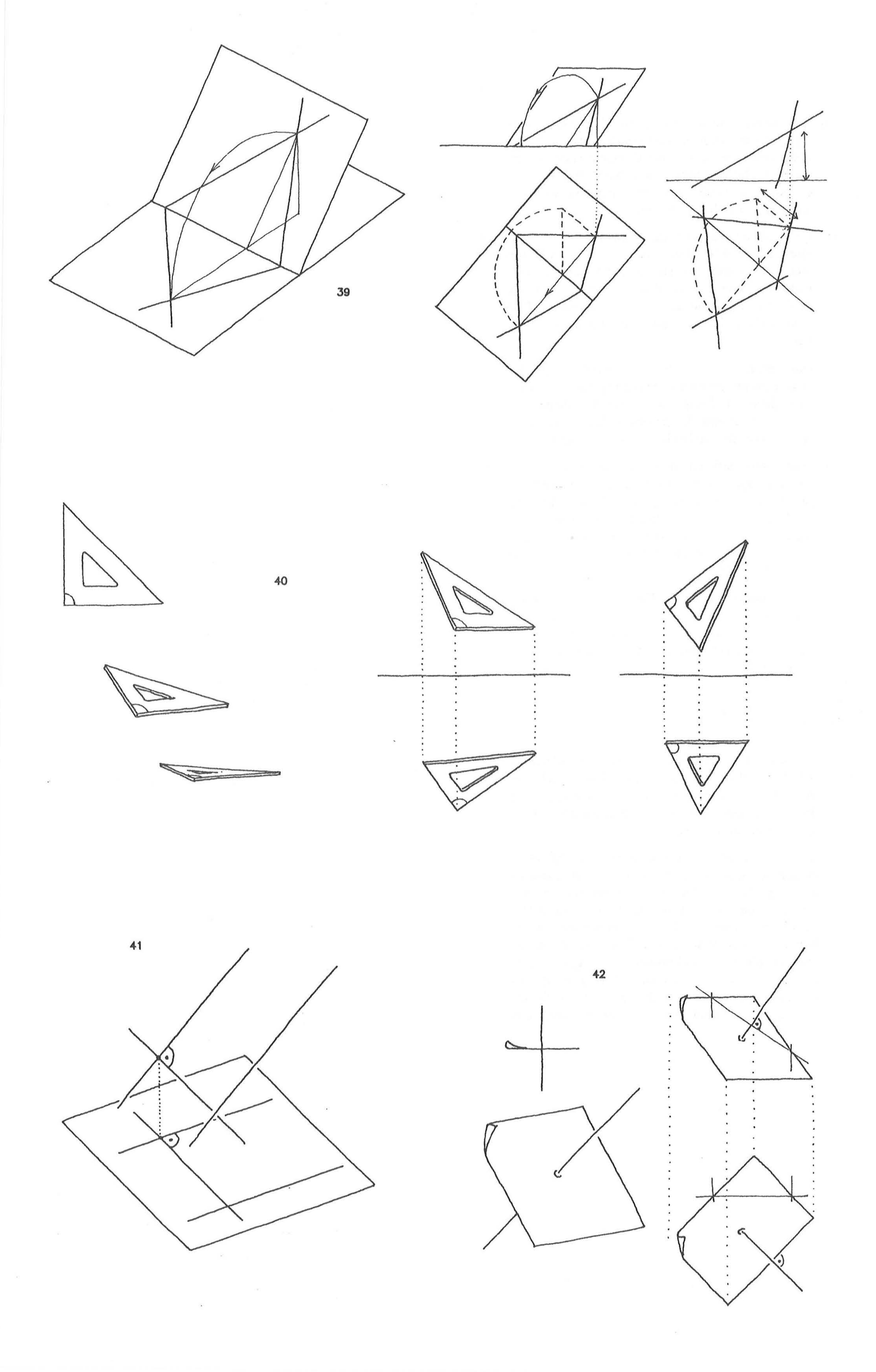
116. El abatimiento se puede hacer en dos sentidos, y suele ser conveniente elegir aquél que deje más claramente separadas las dos figuras. El abatimiento se puede hacer para dejar el plano frontal, y entonces el eje de giro debe ser una recta frontal del plano, etc.

Sistema diédrico; perpendicularidad

117. Los ángulos se ven en verdadera magnitud en planos frontales u horizontales. 40

118. De #29, si dos rectas son perpendiculares y una de ellas es horizontal, aparecen como perpendiculares en la planta; si dos rectas son perpendiculares y una de ellas es frontal aparecen como perpendiculares en el alzado. 41

119. Si una recta es perpendicular a un plano, la proyección horizontal de la recta es perpendicular a la dirección de las horizontales del plano, y la proyección vertical de la recta es perpendicular a las frontales del plano. 42


39
40
41
42

120. Dos rectas que se cruzan en el espacio tienen siempre una perpendicular común. Esta perpendicular común es la mínima distancia entre las dos rectas; es decir, si tomamos un punto de cada recta, la pareja de puntos que están más cercanos está sobre la perpendicular común.

121. La perpendicular común es paralela a la recta intersección de los planos perpendiculares a las dos rectas. Conocida así su dirección, para situarla podemos apoyar esa dirección en un punto cualquiera de una de las rectas para formar un plano y encontrar la intersección de la otra recta con ese plano. 43

122. Dos rectas que se cruzan siempre se pueden considerar pertenecientes a sendos planos paralelos. Esos planos son los que se definen al trasladar cada recta hasta la otra. La perpendicular común a las dos rectas es perpendicular a esos dos planos. 44

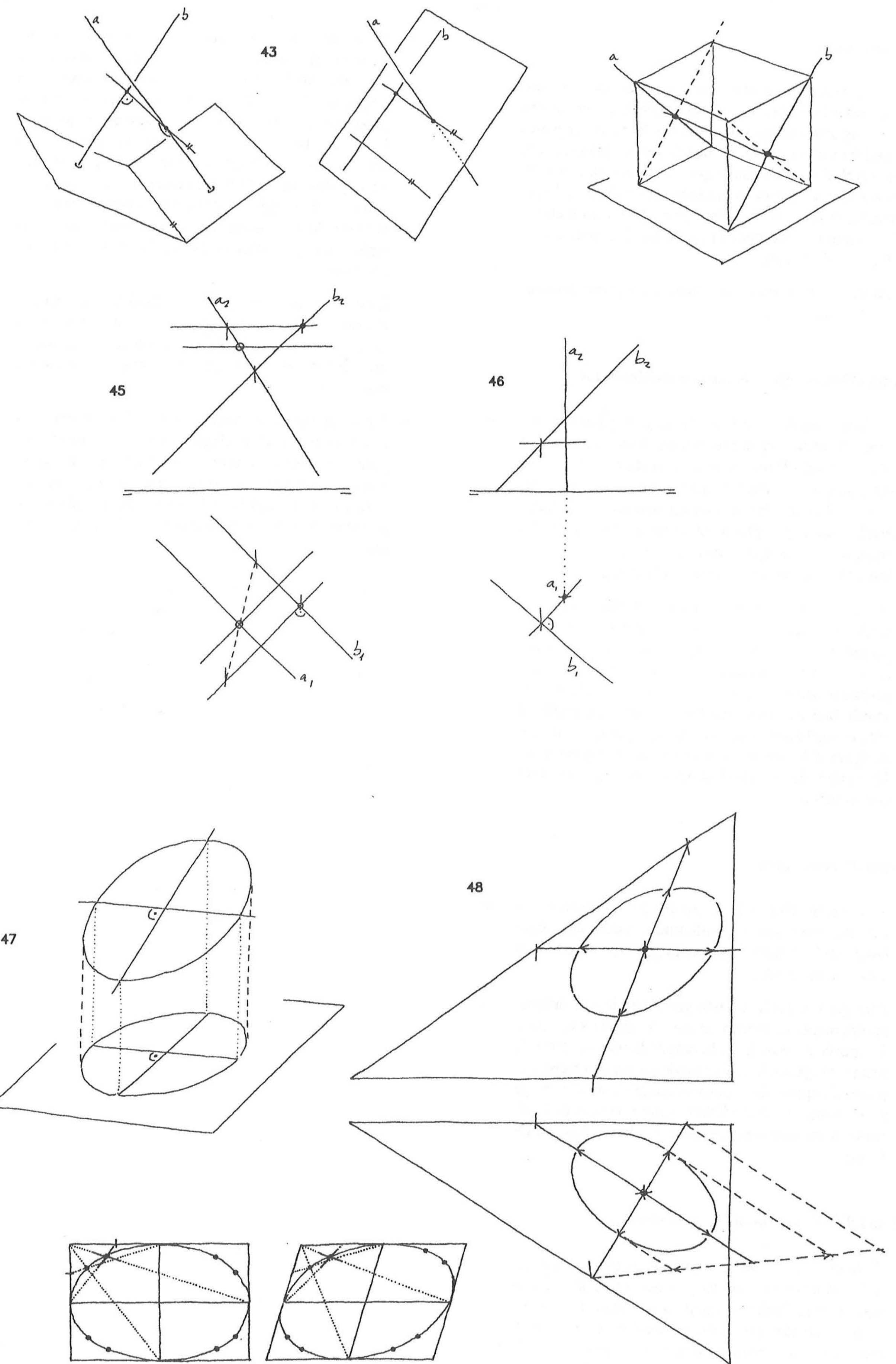
123. Como caso particular de lo anterior, si dos rectas que se cruzan tienen sus proyecciones horizontales paralelas, se encuentran sobre planos verticales paralelos, y entonces la dirección de la perpendicular común es inmediata. Para situarla basta apoyar esa dirección en algún punto de una de las rectas, etc. (#121) 45

124. Como caso aún más particular, si una de las rectas es vertical, la perpendicular común es inmediata, no sólo en dirección, sino en posición (en proyección horizontal ha pasar por el punto que representa a la recta vertical). 46

Circunferencias

125. La proyección cilíndrica de una circunferencia sobre un plano es una elipse. Una pareja de diámetros perpendiculares de la circunferencia se proyectará como una pareja de diámetros conjugados de la elipse proyección. 47

126. Si en lugar de tomar una pareja de diámetros perpendiculares cualquiera tomamos el diámetro que es paralelo al plano y el perpendicular a éste, sus proyecciones serán los ejes de la elipse (#118). Suponiendo que el plano de proyección es el horizontal del sistema diédrico, los diámetros correspondientes son el horizontal y el que es recta de máxima pendiente del plano (#112); en la otra proyección estos mismos diámetros de la circunferencia serán simplemente diámetros conjugados de la elipse. 48


43
a
b
44
a
b
45
a_2
b_2
a_1
b_1
46
a_2
b_2
a_1
b_1
47
48

Intersecciones

127. La intersección de una recta y un plano es un punto, que estará en la recta y en la intersección del plano con alguno auxiliar que pase por la recta. El plano auxiliar más cómodo en diédrico es un proyectante, el vertical o el de canto que pasan por la recta. Si manejamos figuras en axonometría es habitual que conozcamos la proyección horizontal de las rectas y los puntos, y entonces el plano auxiliar más inmediato es el vertical.

128. La intersección entre una recta y un plano proyectante es inmediata.

Sistema diédrico, aplicaciones de abatimientos

129. Se llama ángulo entre una recta y un plano al que forma la recta con su proyección ortogonal sobre el plano. Siendo **P** un punto de la recta de proyección ortogonal **P'**, el ángulo entre la recta y la perpendicular al plano **PP'** es complementario del ángulo entre la recta y el plano. En la figura diédrica se ha encontrado el ángulo entre la recta y el plano del triángulo aprovechando esta circunstancia. 49

130. Se llama ángulo entre dos planos al que forman las rectas intersección de los dos planos con otro perpendicular a ambos (perpendicular a su intersección). Si por cualquier punto se disponen rectas perpendiculares a cada uno de los dos planos, el ángulo buscado es el que forman estas dos rectas, o bien el suplementario, si es mayor que noventa. En la figura diédrica se ha encontrado el ángulo entre los planos de los cuadriláteros aprovechando esta circunstancia. 50

Sistema diédrico, giro

131. Si un punto gira (#32) alrededor de una recta vertical, describe una circunferencia sobre un plano horizontal, es decir, la segunda posición conserva la altura en el alzado. 51

132. Para girar una recta basta girar dos de sus puntos, naturalmente el mismo ángulo. Si giramos el punto de apoyo en la recta de la perpendicular común a la recta y el eje, en la nueva posición seguirá siendo el punto de apoyo de la perpendicular común; si el eje es vertical, la perpendicular común (#123) es horizontal y en planta perpendicular a la proyección de la recta. 52

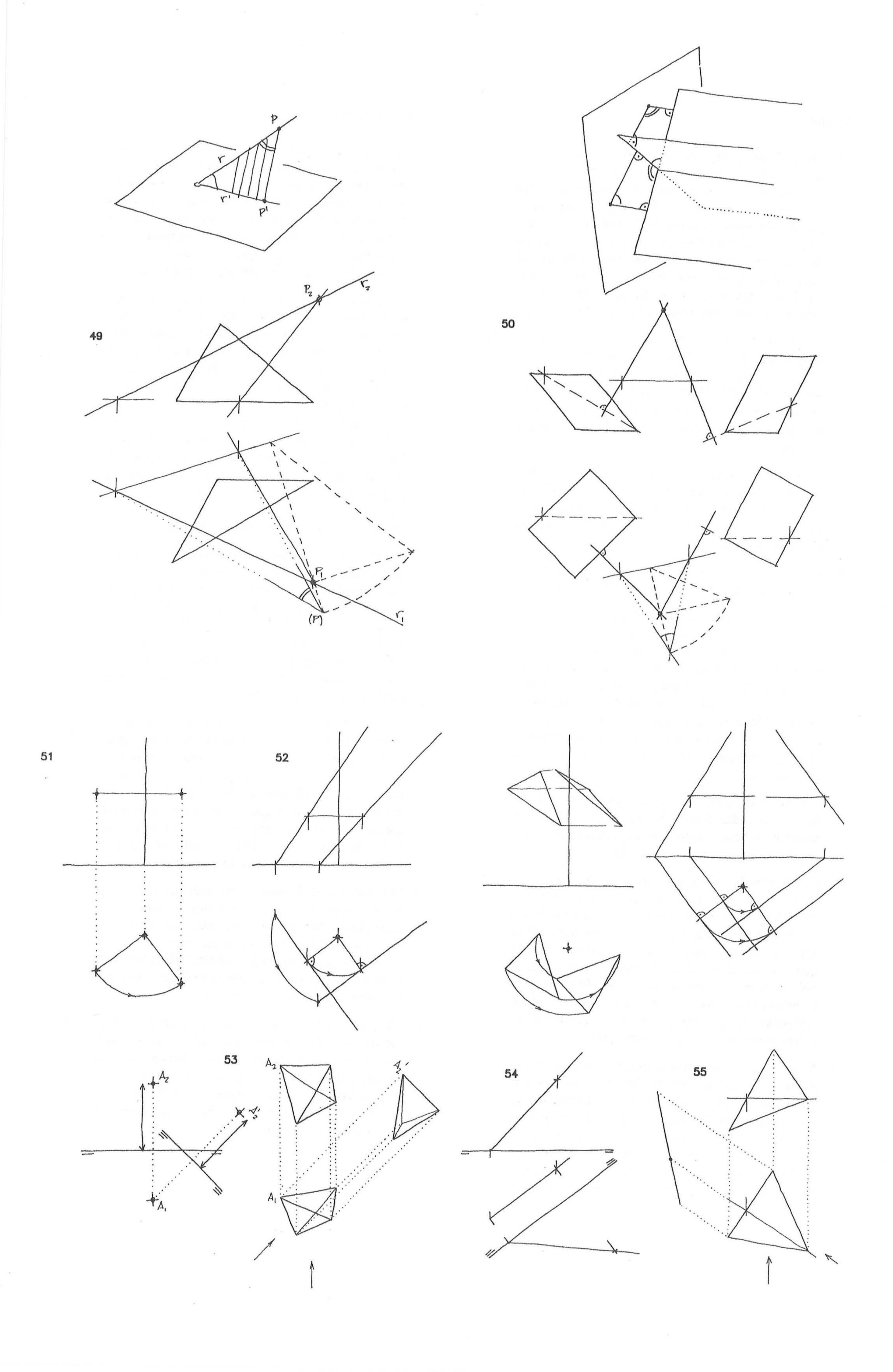
Sistema diédrico, cambio de proyección

133. Podemos fácilmente cambiar un plano de proyección (obtener una nueva proyección) manteniendo fijo el otro. Podemos cambiar el plano de proyección horizontal por otro, manteniendo el vertical; pero entonces evidentemente el nuevo plano de proyección no será ya «horizontal». Es más habitual mantener la planta y cambiar el alzado, lo que equivale a mirar el objeto según otra dirección horizontal.

134. Si mantenemos la planta y cambiamos de alzado, quedarán inalteradas las cotas (alturas) con respecto al plano horizontal de referencia (es decir, con respecto a la línea de tierra) y las cotas relativas de unos puntos respecto a otros. Prescindiendo de la línea de tierra, para construir la nueva vista situaríamos un primer punto más o menos alejado de la planta (esto es a conveniencia) y coordinado con la planta según la dirección correspondiente, y el resto de los puntos igualmente sobre las líneas respectivas y manteniendo las diferencias de cota relativas. 53

135. En el cambio de proyección vertical de una recta, si el nuevo plano de proyección elegido es paralelo a la proyección horizontal de la recta, en la nueva proyección ésta se mostrará frontal, en verdadera magnitud. 54

136. En el cambio de proyección vertical de un plano, si la nueva proyección elegida es tal que muestra de punta una recta horizontal del plano (para eso la nueva dirección de proyección habría de ser paralela a la horizontal) entonces el plano se muestra de canto (y para representarlo bastaría con otro punto más). 55


P
r
r'
P'
49
P2
r2
P1
(P)
r1
50
51
52
53
A2
A1
54
55

Sombras

137. En diédrico un rayo de luz paralela (o un foco de luz puntual) está definido si se dan sus dos proyecciones. En axonometría y perspectiva cónica si se da su proyección directa y la proyección de la proyección sobre el plano horizontal. En perspectiva cónica dar un rayo de luz por la proyección directa y la proyección de la proyección horizontal equivale a dar el punto de fuga del haz de rayos luminosos (que es un punto impropio, cuya proyección horizontal estará sobre la línea del horizonte).

138. Un rayo de luz pasando por un punto y la proyección horizontal de rayo pasando por la proyección horizontal del punto definen un plano vertical. Para encontrar la sombra del punto basta cortar con este plano vertical lo que haya después y comprobar dónde encuentra la proyección directa a esa sección. 56

139. La sombra de una recta sobre un plano paralelo a ella es paralela a la recta. En particular la sombra de una figura plana horizontal sobre un plano horizontal es su traslación a ese plano según la dirección de la luz.

140. La sombra de una recta sobre un plano pasa por el punto de intersección de la recta sobre el plano.

141. En un objeto iluminado hay una línea teórica que separa la parte iluminada de la parte en sombra. Es la línea de tangencia del cono (foco puntual) o cilindro (luz paralela) de los rayos que pasan por el foco y se apoyan tangentes alrededor del objeto. Todo sucede como en los sistemas de representación: el foco de luz es como el punto de vista, los rayos de luz como los rayos visuales o proyectantes, la sombra arrojada sobre un plano como la imagen en el cuadro.

142. Las sombras pueden ser propias (donde no llega la luz) o arrojadas (sobre lo que haya después), y también se llaman autoarrojadas cuando una parte del objeto arroja sombra sobre otra.

143. Un observador situado en el foco de luz no ve sombras. La sombra arrojada de un objeto sobre el plano horizontal es una perspectiva cónica si la luz es puntual, o caballera si la luz es paralela. En la sombra arrojada entendida como una proyección, lo que es oculto es lo que en el objeto no recibe luz. Si construimos la proyección o sombra arrojada completa (no sólo su perímetro) sobre el plano horizontal, lo que tenemos es un esquema de las zonas de sombra propia y autoarrojada. 57

144. Si un punto de una línea arroja sombra en un punto de otra, el mismo rayo de luz que une los dos puntos llega después al suelo en la intersección de las dos sombras. Por tanto, a partir de las sombras de dos líneas y *contraproyectando* desde su intersección, hacia atrás y en la dirección del rayo de luz, llegamos al punto de la primera línea que arroja sombra y al punto de la segunda donde es arrojada.

Sistema acotado

145. El sistema acotado consiste en tomar sólo la proyección horizontal, y sustituir la vertical por la anotación de las cotas de los puntos. Se corta el objeto (habitualmente un terreno) por planos horizontales paralelos (su separación, siempre igual, es la *equidistancia*) y se proyectan esas secciones horizontales (que se llaman *curvas de nivel*) sobre el plano horizontal, indicando su cota.. 58

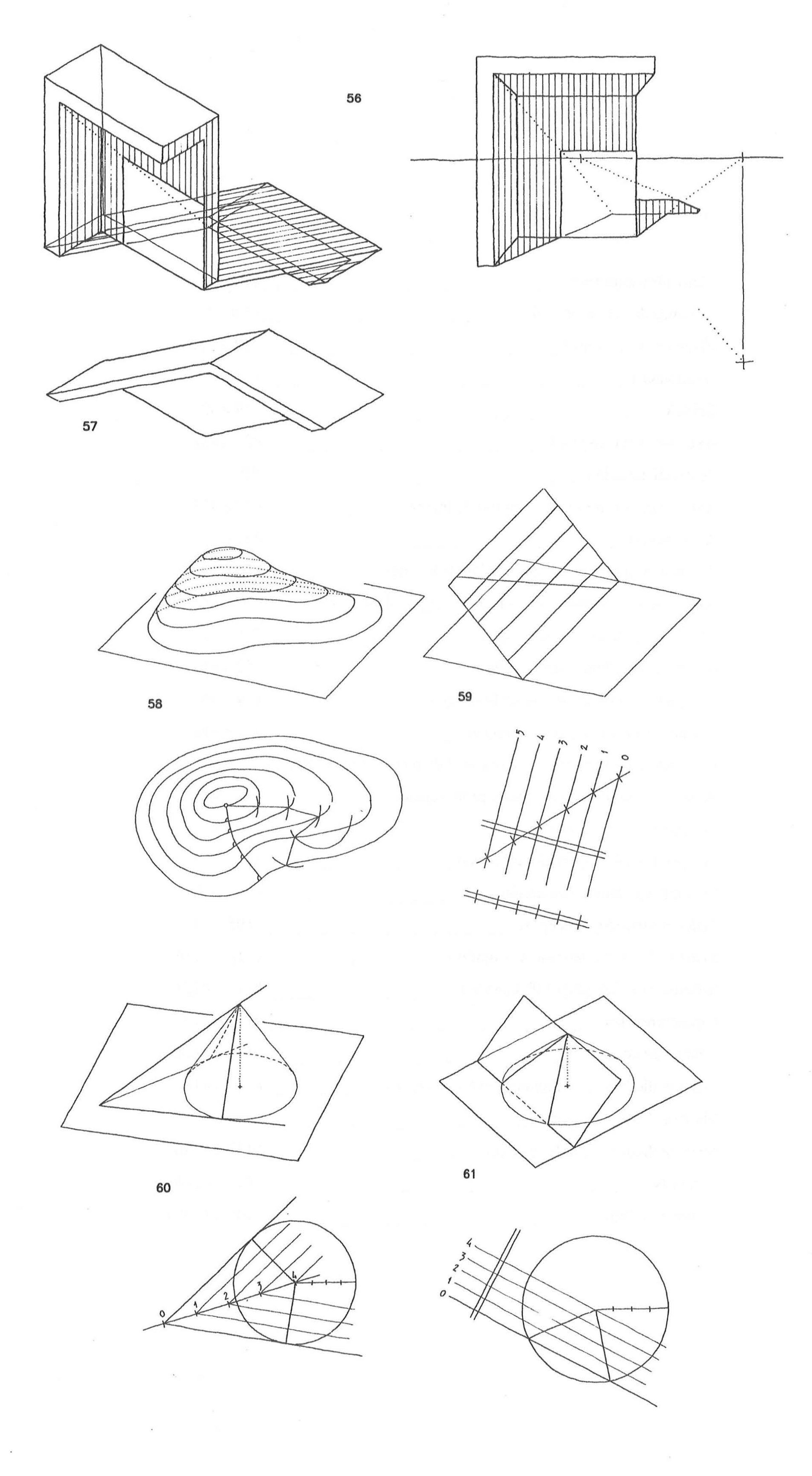
146. En una recta inclinada, del corte por los planos horizontales se obtienen puntos. En la proyección horizontal de la recta los puntos de cota entera están igualmente separados. La separación de los puntos de cota entera en proyección horizontal se llama *intervalo*. Intervalo es, pues, lo que se avanza en horizontal para ascender una unidad en vertical. Si el intervalo es pequeño la pendiente es grande, y si el intervalo es amplio la recta tiene poca pendiente (de hecho se denomina *pendiente* a la tangente del ángulo con la horizontal, es decir, la inversa del intervalo). Sólo con dar, sobre la proyección, la cota de dos puntos de la recta, ya podemos graduarla, y está perfectamente determinada.

147. En un plano inclinado las curvas de nivel son rectas horizontales. Las rectas horizontales de cota entera están igualmente separadas. Tanto en los planos como en los terrenos, si proyecciones de las curvas de nivel están muy cercanas unas de otras la pendiente es grande, y si están separadas la superficie es más llana. En los planos las horizontales de nivel se suelen sustituir por la recta de máxima pendiente graduada (#112). 59

148. En un terreno definido por curvas de nivel, un camino que las corte ortogonalmente es un camino de máxima pendiente (el que seguiría el agua). Si se quiere trazar un camino que no supere cierta pendiente, deberá pasar de una curva a otra recorriendo una distancia igual o mayor que el intervalo correspondiente: en cada punto el arco define dos soluciones, una o ninguna (en este último caso cualquier dirección es de pendiente menor). 58

149. Por una recta dada pasan como máximo dos planos de pendiente dada; son tangentes al cono cuyas generatrices tienen esa pendiente, con vértice en cualquier punto de la recta (la generatriz de tangencia es su recta de máxima pendiente). Si la pendiente de los planos coincide con la de la recta hay una solución, y si es más baja ninguna. 60

150. Un plano dado contiene como máximo dos direcciones de rectas de pendiente dada; están contenidas en el cono cuyas generatrices tienen esa pendiente, con vértice en cualquier punto del plano. Si la pendiente de las rectas coincide con la del plano hay una solución (la recta de máxima pendiente), y si es más baja ninguna. 61



56

57

58

59

60

61

ÍNDICE

Elementos impropios ________ #1 a #5

Sistemas de representación ________ #6 a #9

Plano de proyección ________ #10 a #12

Axonometría ________ #13 a #18

Caballera ________ #19 a #23

Axonometría ortogonal ________ #24 a #28

Perpendicularidad ________ #29

Axonometría ortogonal; triángulo de trazas ________ #30 a #31

Abatimiento ________ #32 a #35

Axonometría ortogonal; graduación de los ejes ________ #36 a #38

Axonometría ortogonal; distancia del origen al cuadro ________ #39 a #45

Caballera; graduación de los ejes ________ #46 a #51

Axonometría oblicua no caballera ________ #52 a #53

Perspectiva cónica; control de la imagen ________ #54 a #65

Perspectiva cónica; puntos y rectas ________ #66 a #76

Perspectiva cónica; perpendicularidad de rectas horizontales __ #77 a #80

Perspectiva cónica; divisiones y proporciones ________ #81 a #84

Perspectiva cónica; planos ________ #85 a #89

Perspectiva cónica; cuadro inclinado ________ #90 a #95

Perspectiva cónica; restitución ________ #96 a #104

Sistema diédrico, conceptos ________ #105 a #112

Sistema diédrico, verdadera magnitud ________ #113 a #116

Sistema diédrico, perpendicularidad ________ #117 a #124

Circunferencias ________ #125 a #126

Intersecciones ________ #127 a #128

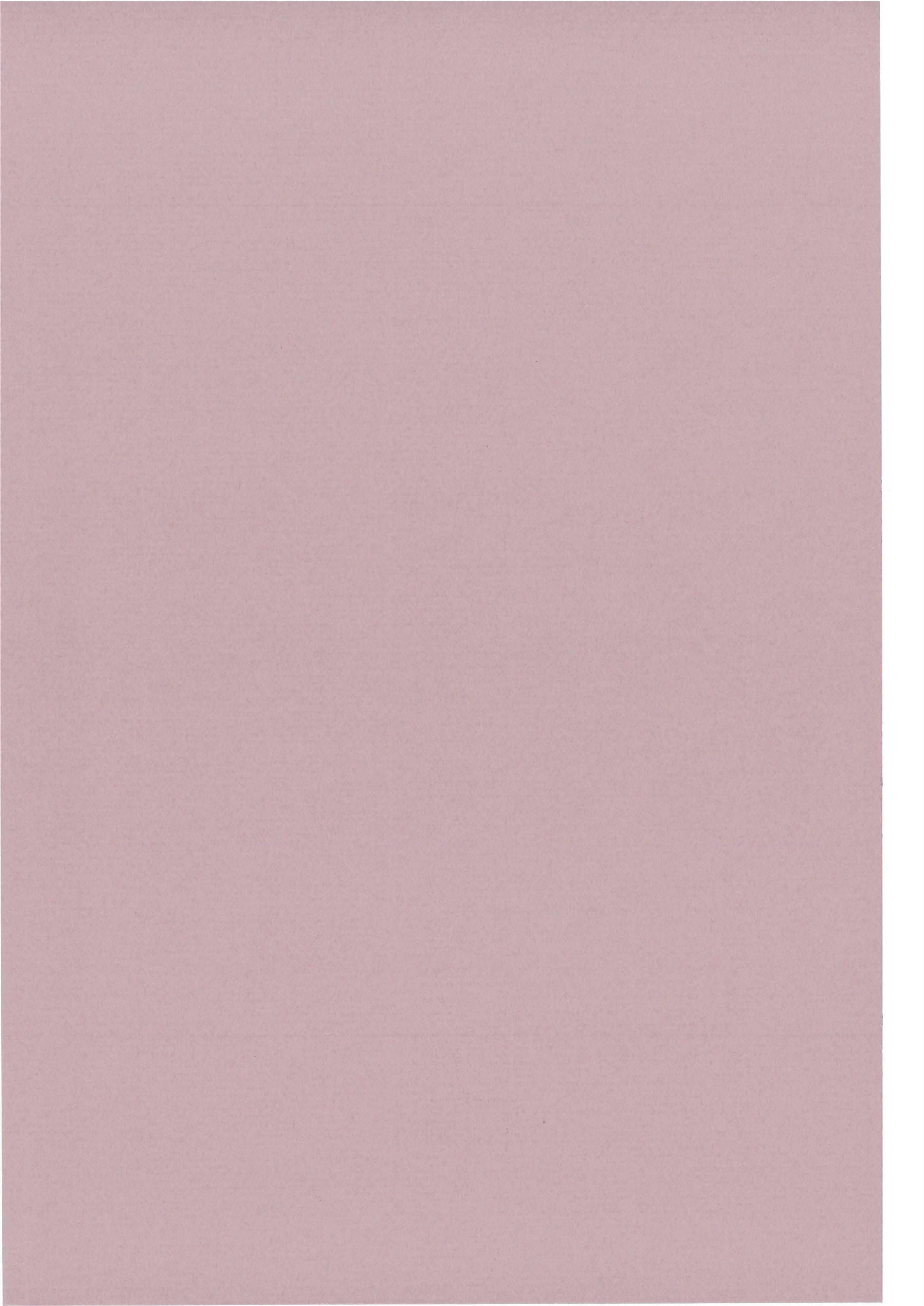
Sistema diédrico, aplicaciones de abatimientos ________ #129 a #130

Sistema diédrico, giros ________ #131 a #132

Sistema diédrico, cambios de proyección ________ #133 a #136

Sombras ________ #137 a #144

Sistema acotado ________ #145 a #150



CUADERNO

78.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

